Exercice 1 La solution de l'équation homogène $y'+ay=0$ est $y(t)=Ce^{-at}$.

La recherche d'une solution de l'équation avec second membre à l'aide de la méthode de la variation de la constante conduit à $C'(t)e^{-at}=f(t)$ soit $C(t)=\int_0^t f(s)e^{as}ds$ par exemple.

La solution générale de $y'+ay=f$ est donc $y(t)=Ce^{-at}+e^{-at}\int_0^t f(s)e^{as}ds$ $(C\in\mathbb{R})$.

Or a clairement $\lim_{t\to+\infty} Ce^{-at}=0$. Il reste donc à prouver $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}ds=0$.

Soit $\varepsilon>0$ $\exists A(\varepsilon)$ $\forall s>A(\varepsilon)$ $|f(s)|<\varepsilon$. Fixons un tel $A(\varepsilon)$

$\forall t\geq A(\varepsilon)$ $$\left|\int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}ds\right|\leq e^{-at}\int_0^{A(\varepsilon)}|f(s)|e^{as}ds+\int_{A(\varepsilon)}^t |f(s)|e^{-a(t-s)}ds$$

$$\leq Ke^{-at}+\varepsilon\int_0^t e^{-a(t-s)}ds=Ke^{-at}+\varepsilon\left[-\frac{1}{a}e^{-a(t-s)}\right]_0^t$$

$$\left|\int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}ds\right|\leq Ke^{-at}+\frac{\varepsilon}{a}.$$

Or $\lim_{t\to+\infty} Ke^{-at}=0$ donc il existe $B(\varepsilon)(\geq A(\varepsilon))$ tel que $\forall t\geq B(\varepsilon)$ $Ke^{-at}\leq\varepsilon$.

En conclusion

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B(\varepsilon)\ \forall t\geq B(\varepsilon)\ \left|\int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}ds\right|\leq\left(1+\frac{1}{a}\right)\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B_1(\varepsilon)\left(=B\left(\frac{\varepsilon}{1+\frac{1}{a}}\right)\right)\ \forall t\geq B_1(\varepsilon)\ \left|\int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}ds\right|<\varepsilon$$

Ceci est bien équivalent à $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(s)e^{-a(t-s)}ds=0$.

Exercice 2

- Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique (${}^tM = M$), soit λ une valeur propre (complexe) de M et X un vecteur propre complexe associé :

$${}^t\overline{X}MX = {}^t\overline{X}\lambda X = \lambda\, {}^t\overline{X}X = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 . \qquad {}^t\overline{X}MX = {}^t\overline{X}\,{}^t\overline{M}X = {}^t(\overline{MX})X = {}^t(\overline{\lambda X})X = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}X$$

donc $\lambda \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)}_{\neq 0} = \overline{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)$ donc $\lambda = \overline{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- Si M est antisymétrique réelle ${}^t\overline{M} = -M$ on obtient par le même raisonnement

$$\lambda\, {}^t\overline{X}X = -\overline{\lambda}\, {}^t\overline{X}X$$ donc $\lambda = -\overline{\lambda}$ et $\lambda \in i\mathbb{R}$

- Si M est orthogonale ${}^tMM = I_n$

$${}^t\overline{X}X = {}^t\overline{X}I_nX = {}^t\overline{X}\,{}^tMMX = {}^t\overline{X}\,{}^t\overline{M}MX = {}^t(\overline{MX})MX = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{X}(\lambda X) = |\lambda|^2\, {}^t\overline{X}X$$

$${}^t\overline{X}X = |\lambda|^2\, {}^t\overline{X}X \qquad {}^t\overline{X}X = \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 > 0$$ donc $|\lambda|^2 = 1$ $\quad |\lambda| = 1$.

Exercice 3 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. $X+Y$ est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\{X+Y=n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X=k, Y=n-k\}$$, les évènements étant disjoints (ou incompatibles)

Donc $$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)$$

X et Y sont indépendantes

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$P(X+Y=n) = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}$$

$$P(X+Y=n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda+\mu)^n$$ (Formule du binôme)

Donc $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Exercice 4 - X est d'espérance finie donc $\sum_{n\geq 0} n P(X=n)$ converge et

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\big(P(X>n-1) - P(X>n)\big) = E(X)$$

$$\sum_{n=1}^{N} n\big(P(X>n-1) - P(X>n)\big) = \sum_{n=1}^{N} n\big(P(X>n-1)\big) - \sum_{n=1}^{N} n P(X>n) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) P(X>n) - \sum_{n=1}^{N} n P(X>n)$$

$$\sum_{n=1}^{N} n\big(P(X>n-1) - P(X>n)\big) = P(X>0) + \Big(\sum_{n=1}^{N-1} (n+1-n) P(X>n)\Big) - N P(X>N) = \Big(\sum_{n=0}^{N-1} P(X>n)\Big) - N P(X>N)$$

Or $P(X>N) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(X=n)$ Donc $N P(X>N) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} N P(X=n) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} n P(X=n)$.

Donc $\lim_{N\to+\infty} N P(X>N) = 0$ car $\sum_{n\geq 0} n P(X=n)$ converge (On reconnait dans $\sum_{n=N+1}^{+\infty} n P(X=n)$ le reste d'ordre N)

Par conséquent puisque $\lim \sum_{n=1}^{N} n P(X=n) = E(X)$ $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} P(X>n)$ existe et

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n).$$

- Autre rédaction (dans l'autre sens). $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(X>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}$ avec

$u_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n \\ P(X=k) & \text{si } k > n \end{cases}$. Montrons que $(u_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

① C'est une famille double de réels positifs ② $\forall k \in \mathbb{N}$ $\sum_{n\geq 0} u_{n,k}$ converge vers $\sum_{n=0}^{k-1} P(X=k) = k P(X=k)$

③ $\sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\Big)$ converge vers $E(X)$ car X est d'espérance finie. Donc $(u_{n,k})$ est sommable.

Par conséquent $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n)$. (toutes les sommes étant finies).

PS. Je préfère cette deuxième rédaction, même si la première semble plus courante.

Exercice 5 1) Pour que $P(Y=k|X=i)$ soit défini il faut $P(X=i)\neq 0$. Une fois cette condition remplie $E(Y|X=i)$ est défini si $\sum_{k\geq 0} k P(Y=k|X=i)$ converge. (Néanmoins ~~si~~ si cette série diverge on peut toujours supposer $E(Y|X=i)=+\infty$)

2) On suppose donc $\forall i \quad P(X=i)\neq 0$. On définit la famille double $(u_{k,i})_{(k,i)\in\mathbb{N}^2}$ par $u_{k,i} = k\, P(Y=k|X=i)\, P(X=i) = k\, P(Y=k, X=i)$.

Cette famille de réels positifs est sommable si et seulement si :

(i) $\forall i\in\mathbb{N} \quad \sum_{k\geq 0} k\, P(Y=k|X=i) P(X=i)$ converge, c'est à dire ssi $\forall i\in\mathbb{N} \quad E(Y|X=i)$ existe

et et on a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(Y=k|X=i) P(X=i) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,i} = E(Y|X=i)\, P(X=i)$.

(ii) $\sum_{i\geq 0} E(Y|X=i) P(X=i)$ converge. (Erreur d'énoncé)

oubien :

(i') $\forall k\in\mathbb{N} \quad \sum_{i\geq 0} k P(Y=k|X=i) P(X=i) = \sum_{i\geq 0} k\, P(Y=k, X=i)$ converge.

et ce qui est toujours le cas avec $\sum_{i=0}^{+\infty} k\, P(Y=k, X=i) = k\, P(Y=k)$ d'après la formule des probabilités totales

(ii') $\sum_{k\geq 0} k\, P(Y=k)$ converge, c'est-à-dire Y possède une espérance finie

Si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée $(u_{k,i})_{(k,i)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{k,i} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,i} = \sum_{i=0}^{+\infty} E(Y|X=i)\, P(X=i)$$

Exercice 6 $A \in S_n^+$ donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ $A = PD\,{}^tP = PDP^{-1}$ où

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres (positives) de A.

Donc $\forall i$ $\exists!\, \mu_i \in \mathbb{R}^+$ $\mu_i^2 = \lambda_i$, soit $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Soit $X_0 = P\Delta\,{}^tP = P\Delta P^{-1}$. $X_0^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$

et ${}^tX_0 = {}^t({}^tP)\,{}^t\Delta\,{}^tP = P\Delta\,{}^tP = X_0$ X_0 est bien une solution au problème $X^2 = A$.

Soit X une solution dans S_n^+ de $X^2 = A$.

X est diagonalisable $X = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, alors

$X^2 = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $\forall i$ $\lambda_i = \mu_i^2$ et

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres de A (positives) comptées avec leur multiplicité. Puisque $\mu_i \geq 0$ on a $\forall i$ $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$

Soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ les valeurs propres de A, distinctes, et

$L = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\gamma_k} \dfrac{\prod_{j \neq k}(X - \gamma_j)}{\prod_{j \neq k}(\gamma_k - \gamma_j)}$. On a $\forall j$ $L(\gamma_j) = \sqrt{\gamma_j}$ donc $\forall i$ $L(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} = \mu_i$

Par conséquent $L(D) = \Delta$ et ~~de~~ puisque $M \mapsto PMP^{-1}$ est un morphisme d'algèbre on a $L(A) = L(PDP^{-1}) = PL(D)P^{-1} = P\Delta P^{-1} = X$.

Or L ne dépend que de A, donc X est unique.

Exercice 7 $\quad B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$, puis par récurrence $\forall k \quad B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

Par linéarité $\quad P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

Si B est diagonalisable il existe un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(B) = 0$. Donc $P(A) = 0 \quad AP'(A) = 0$. Or puisque P est scindé à racines simples P et P' sont premiers entre eux. Il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$

$UP + VP' = 1 \qquad XUP + XVP' = X \quad = XUP + VXP'$.

donc $\qquad AU(A)P(A) + V(A)AP'(A) = A$

et $\qquad 0 = A.$

(Réciproquement si $A = 0$ il est clair que B est diagonalisable)

Exercice 8. 1) On recherche des solution de cette équations sous la forme de sommes de séries entière.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$, alors f est C^∞ sur $]-R,R[$ et

$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = x f'(x)$. Donc f est solution ssi

$\forall x \in]-R,R[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n\right) x^n$. Par unicité du développement en série entière f est solution de l'équation ssi $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)\left((n+2) a_{n+2} + a_n\right) = 0$

En choisissant $a_0 = 1$ $a_1 = 0$ on obtient une première solution

$$\boxed{f_1 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

en choisissant $a_0 = 0$ $a_1 = 1$ on obtient une deuxième solution

$$\boxed{f_2 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) \times \cdots \times 1}}$$

le rayon de convergence de f_1 est infini (résultat connu), de $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{2n+3} x^{2n+3}|}{|a_{2n+1} x^{2n+1}|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^2}{2n+3} = 0$ si $x \neq 0$

on en déduit d'après la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de la deuxième est aussi $+\infty$.

Puisque $W(f_1, f_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (f_1, f_2) est bien une base de l'espace des solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ (qui est de dimension 2 d'après le théorème de Cauchy, car $x \mapsto 2, x, 2$ sont continue et 2 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

Rq. Puisque f_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ on aurait pu faire le changement de fonctions $y = z f_1$. y est solution de E ssi $2z'' f_1 + 2(2 f_1' + x f_1) z' = 0$ $\quad z'' + \left(2\frac{f_1'}{f_1} + x\right) z' = 0 \quad z'' - x z' = 0$

$z'(x) = C e^{\frac{x^2}{2}} \qquad y(x) = C e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt + D e^{-\frac{x^2}{2}}$. La condition $f_2(0) = 0$ $f_2'(0) = 1$

donne $f_2(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$

2) On résout l'équation différentielle avec second membre à l'aide de la méthode de la variation des constantes. On cherche une solution particulière sous la forme $f_0 = C_1 f_1 + C_2 f_2$ où C_1 et C_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ en résolvant le système

$$\begin{cases} C_1' f_1 + C_2' f_2 = 0 \\ C_1' f_1' + C_2' f_2' = \dfrac{f}{2} \end{cases}$$

(Ne pas oublier de diviser par le coefficient de y'')

On obtient $\quad C_1' = \dfrac{1}{2} \dfrac{f f_2}{f_2 f_1' - f_1 f_2'} \qquad C_2' = -\dfrac{1}{2} \dfrac{f f_1}{f_2 f_1' - f_1 f_2'}$

d'où $\quad \underline{C_1(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x \dfrac{f(s) f_2(s)}{W(s)}\, ds} \qquad \underline{C_2(x) = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x \dfrac{f(s) f_1(s)}{W(s)}\, ds}$ où $W = W(f_1, f_2)$

La solution générale est $\underline{f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)}$ $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$.

<u>Rq</u>. $W'(f_1, f_2) = f_1'' f_2 + f_1' f_2' - f_1' f_2' - f_1 f_2'' = (-\frac{x}{2} f_1' - f_1) f_2 - (-\frac{x}{2} f_2' - f_2) f_1 = -\frac{x}{2} W(f_1, f_2)$

Donc $\underline{W(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} W(0) = e^{-\frac{x^2}{4}}}$ cela simplifie un peu l'expression des C_i

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\frac{s^2}{4}} f(s) \int_0^s e^{\frac{u^2}{2}} du\, ds \qquad C_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x e^{-\frac{s^2}{4}} f(s)\, ds$$

et finalement

$$\underline{C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{s^2}{4}} f(s) \int_x^s e^{\frac{u^2}{2}} du\, ds}$$

Exercice 9   Soit $\varphi_x(t) = f(t) - A\,t(t-1)$ où $A = \dfrac{f(x)}{x(x-1)}$ est choisi pour que $\varphi_x(x)=0$

φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$, à valeurs réelles et $\varphi(0)=\varphi(x)=0$ donc $\exists c_1 \in]0,x[$ $\varphi'_x(c_2)=0$ (Théorème de Rolle)

de même. $\exists c_2 \in]x,1[$ $\varphi'_x(c_2)=0$

φ'_x est $\mathcal{C}^1$ sur $[c_1, c_2]$ avec $c_1 < c_2$ $\varphi'_x(c_1)=\varphi'_x(c_2)$, φ'_x est à valeurs réelles

donc il existe $c \in]c_1, c_2[\subset]0,1[$. $\varphi''_x(c)=0$.

Or $\varphi''_x(t) = f''(t) - 2A$. donc $A = \dfrac{f''(c)}{2}$ et puisque $\varphi_x(x)=0$

on a $f(x) = \dfrac{f''(c)}{2}\,x(x-1)$

Exercice 10)

1) On note L_i la i-ème ligne de $XI_n - A$, et on calcule $\det(XI_n - A)$ en effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + \quad + X^{n-1}L_n$.

La première ligne ne contient plus qu'un coefficient non nul, le dernier.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 0 & & 0 & X^n + a_0X^{n-1} \dots + a_{n-1} \\ -1 & \ast & & + a_{n-2} \\ & & 0 & \\ & 0 & X & \\ & & -1 & X + a_0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne on obtient $\chi_A(X) = (-1)^{n+1}(X^n + \quad + a_{n-1})(-1)^{n-1}$

$$\chi_A(X) = X^n + a_0X^{n-1} + \dots + a_{n-1}.$$

2) Si λ est valeur propre de A et $B = A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & & & \\ 1 & -\lambda & & \\ & & -\lambda & \\ & & 1 & -\lambda - a_0 \end{pmatrix}$

alors la matrice extraite de B en supprimant sa première ligne et sa dernière colonne est de déterminant 1, donc inversible. Par conséquent $rg(B) \geq n-1$. Puisque B est non inversible $rg(B) = n-1$ et $\dim E_\lambda(A) = n - rg(B) = 1$.

Exercice 11

1) $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1}\,dt$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\,dt$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}}{k} = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^1 + R_n = \ln 2 + R_n$$

$R_n = (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$ donc $|R_n| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

2) $u_n = \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -R_n = (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$

Donc $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} t^n}{1+t}\,dt = \int_0^1 -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-t)^n}{(1+t)}\,dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\,dt + \underbrace{(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt}_{r_n}$$

$|r_n| \leq \int_0^1 t^{n+1}\,dt = \frac{1}{n+2}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ et $\sum_{k\geq 1} u_k$ converge avec $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{t+1-1}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \ln 2 + \left[\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

Exercice 12.

$\forall x \in [-a, a] \quad \forall t \in \mathbb{R}^{*+} \qquad t^2 \leq x^2 + t^2 \leq a^2 + t^2$

$$2 \ln t \leq \ln(x^2+t^2) \leq \ln(a^2+t^2)$$

$$|\ln(x^2+t^2)| \leq \max(2|\ln t|, |\ln(a^2+t^2)|) \leq 2|\ln t| + |\ln(a^2+t^2)|$$

$\forall x \in [-a, a] \quad \forall t \in \mathbb{R}^{*+} \qquad |\ln(x^2+t^2)| \leq 2|\ln t| + |\ln(t^2+a^2)|$

$\forall x \in [-a, a] \quad \forall t \in \mathbb{R}^{*+} \qquad \left|\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{2|\ln t| + |\ln(t^2+a^2)|}{1+t^2} = \varphi(t)$

φ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$

$\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} 2|\ln t| \underset{t\to 0}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\frac{1}{2} < 1$ donc φ est intégrable sur $]0, 1]$ (Règle de Riemann)

$\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{4 \ln t}{t^2} = O\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Règle de Riemann)

En conclusion φ est intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$