Polytechnique Deuxième épreuve 2008 MP

Première partie

1.) Une application injective de $\{1, \ldots, n\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ est surjective, de même une application surjective de $\{1,\ldots,n\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ est injective.

Donc $\boxed{j_{n,n} = s_{n,n} = n!}$ (nombre de permutations de $\{1,\ldots,n\}$)

2.) L'image d'une injection i de $\{1, \ldots, k\}$ est une partie à k éléments de $\{1, \ldots, n\}$ et une telle partie A étant donnée il y a autant d'injections de $\{1, \ldots, k\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$ dont l'image est A que de permutations des k éléments de A. Donc

$$\boxed{j_{k,n} = \binom{n}{k} \cdot k!}$$

(car $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments de $\{1,\ldots,n\}$)

3.a) Reprenons le principe de dénombrement de la question précédente en l'appliquant aux applications de $\{1, \ldots, n\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$. Une telle application réalise une surjection de $\{1, \ldots, n\}$ sur son image A qui est une partie de $\{1, \ldots, n\}$ à q éléments. $(q \geq 1)$. Réciproquement une telle partie étant donnée il y a $s_{k,q}$ surjection de $\{1, \ldots, k\}$ vers A donc $s_{k,q}$ applications dont l'image est A. Puisqu'il y au total n^k applications de $\{1, \ldots, k\}$ vers $\{1,\ldots n\}$, on obtient bien

$$\boxed{n^k = \sum_{q=1}^{n} s_{k,q}\, p_{q,n}} \qquad (k>0, n>0)$$

3.b) L'ensemble des égalités précédentes, pour $1 \leq k, n \leq r$ s'interprète immédiatement comme un produit matriciel. $\boxed{A(r) = S(r)\,P(r)}$.

En passant au déterminant, il vient :

$$\det A(r) = \det S(r)\ \det P(r)$$

Or $p_{k,n} = 0$ si $k > n$ donc $P(r)$ est triangulaire supérieure, et $s_{k,n} = 0$ si $k < n$ donc $S(r)$ est triangulaire inférieure.

En conclusion.

$$\boxed{\det A(r) = \prod_{k=1}^{r} s_{k,k} \times \prod_{k=1}^{r} p_{k,k} = \prod_{k=1}^{r} k!}$$

Deuxième partie

4.a) On a $(X+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ d'après la formule du binôme. On en déduit

$$\boxed{\begin{array}{ll} T_{k,n} = \binom{n}{k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ T_{k,n} = 0 & \text{si } k > n \end{array}}$$

la matrice de T est triangulaire supérieure, ~~...~~

4.b) Soit $U : P \to U(P)$ avec $\boxed{U(P)(X) = P(X-1)}$

on a $U \circ T = T \circ U = Id_{\mathbb{R}_d[X]}$ donc T est bijectif et

$$\boxed{T^{-1} = U}.$$

La formule du binôme donne immédiatement

$$\boxed{\begin{array}{ll} U_{k,n} = (-1)^{(n-k)} \binom{n}{k} & \text{si } 0 \leq k \leq n. \\ U_{k,n} = 0 & \text{si } k > n. \end{array}}$$

~~4.c)~~) les relations
$$a_n = \sum_{q=0,\dots,n} b_q \binom{n}{q} \qquad 0 \leq n \leq d$$
se résument matriciellement en
$$(a_0, \quad , a_d) = (b_0, \quad , b_d)\, T(d)$$
où $T(d)$ est la matrice représentant T.

On a donc
$$(b_0, \quad , b_d) = (a_0, \quad , a_d)\, T^{-1}(d)$$
ce qui conduit à
$$b_n = \sum_{q=0}^{n} a_q (-1)^{(n-q)} \binom{n}{q}$$

4.d) Fixons $k \geq 1$ et $d \geq 1$. Posons $b_0 = 0$ et pour $1 \leq q \leq d$ $b_q = s_{k,q}$, ~~Alors~~ puis $a_0 = 0$ et $a_n = n^k$ pour $1 \leq n \leq d$.

Alors $\forall n \in [1,d] \quad a_n = \sum_{q=1}^{n} b_q \binom{n}{q}$ d'après 3.a)

Donc $\forall n \in [1,d] \quad a_n = \sum_{q=0}^{n} b_q \binom{n}{q}$ car $b_0 = 0$

et $\forall n \in [0,d] \quad a_n = \sum_{q=0}^{n} b_q \binom{n}{q}$ car $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $b_q \binom{0}{q} = 0$ pour $q \geq 0$.

D'après la question précédente on a donc
$$\forall n \in [1,d] \quad s_{k,n} = \sum_{q=1}^{n} (-1)^{n-q} \binom{n}{q} q^k \qquad (\text{car } 0^k = 0)$$

5) $\deg N_k(X) = k$ les N_k ont des ~~deux~~ degrés distincts, la famille $(N_0, \quad , N_d)$ est donc libre. Son cardinal est $d+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_d[X]$. $(N_0, \quad , N_d)$ est donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$

6) Soit $k \geq 1$.

- Si $k = 1$ $\quad T(N_k) = X + 1 = X + T(N_{k-1})$ car $N_0 = 1$ donc $T(N_0) = 1$
- Si $k > 1$

$$T(N_k) - T(N_{k-1}) = \frac{1}{k!}(X+1)(X+2)\cdots(X+k) - \frac{1}{(k-1)!}(X+1)\cdots(X+k-1)$$

$$= \frac{1}{k!}(X+1)\cdots(X+k-1)(X+k-k)$$

$$= \frac{1}{k!}X(X+1)\cdots(X+k-1)$$

$$T(N_k) - T(N_{k-1}) = N_k.$$

Finalement $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad T(N_k) = N_k + T(N_{k-1})}$

7.a) $T(N_0) = N_0 \qquad T(N_1) = N_1 + T(N_0) = N_0 + N_1$

$$T(N_2) = N_2 + T(N_1) = N_0 + N_1 + N_2.$$

On montre facilement par récurrence

$$\boxed{T(N_k) = \sum_{q=0}^{k} N_q}$$

On en déduit $\quad \tilde{T}_{k,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq q \\ 0 & \text{si } k > q \end{cases}$

7.b) $\boxed{T^{-1}(N_0) = N_0}$, T est linéaire et $T(N_k - N_{k-1}) = N_k$.

donc $\boxed{T^{-1}(N_k) = N_k - N_{k-1} \text{ pour } k \geq 1}$

On en déduit $\quad \boxed{\tilde{T}^{-1}_{k,q} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = q \\ -1 & \text{si } k = q-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

~~8a)~~

8) On a. $X^0 = 1 = N_0$.

Soit $d \geq 1$. On sait qu'il existe une unique ~~vect~~ suite $(a_0, \quad , a_d)$ telle que

$$(*) \qquad X^d = \sum_{q=0}^{d} a_q N_q$$

les deux membres de cette égalité sont des polynômes de degré d. Il sont égaux ssi il sont égaux en $(d+1)$ points distincts. $(*)$ est donc équivalente à.

$$(**) \quad \forall n \in [0,d] \qquad (-n)^d = \sum_{q=0}^{d} a_q N_q(-n)$$

Pour $n = 0$ on obtient $a_0 = 0$

et pour $n \geq 1$ $\qquad (-1)^d n^d = \sum_{q=1}^{n} a_q (-1)^q \binom{n}{q}$

Or d'après 3. a) ces égalités sont vérifiées pour $a_q = S_{d,q} (-1)^{q-n}$

et par unicité

$$X^0 = N_0$$

$$\text{et } \forall d \geq 1 \quad X^d = \sum_{q=1}^{d} (-1)^{d-q} S_{d,q} N_q$$