Polytechnique MP 2011 Mathématiques B

Première partie : suites complètement monotones

1a) Comme nous le conseille l'énoncé, nous raisonnons par récurrence

Pour $p=1$ $\quad (\Delta^1 u)_n = f(n+1) - f(n) = f'(x) \quad x \in]n, n+1[$

car f est au moins dérivable et à valeurs réelles.

(C'est l'égalité des accroissements finis)

On suppose le résultat vrai à l'ordre p, pour toute fonction f.

Alors $(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p(\Delta u))_n$.

Or Δu est associée à la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$

l'hypothèse de récurrence donne donc.

$$(\Delta^{p+1} u)_n = g^{(p)}(x+1) - g^{(p)}(x) \qquad x \in]n, n+p[.$$

Une nouvelle application de l'égalité des accroissements finis à $g^{(p)}$, entre x et $x+1$, donne $(\Delta^{p+1} u)_n = g^{(p+1)}(y)$

où $y \in]n, n+p+1[$.

C'est bien le résultat à l'ordre $p+1$.

1b) $(a_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$ $\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc associée à la fonction.

$f : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$, dont la dérivée p-ième est

$$f^{(p)} : x \longmapsto \frac{(-1)^p p!}{(1+x)^{p+1}}.$$

D'après la question précédente. $\forall n \ \forall p \quad (-1)^p (\Delta^p a)_n = \frac{p!}{(1+x)^{p+1}} > 0$

(où $x = x_{n,p} \in]n, n+p[$)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien complètement monotone.

2a) On démontre ce résultat par récurrence sur p.

- Pour $p=1$. $\quad (\Delta^1 u)_n = u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (-1)^{1-k} u_{n+k}$.
- On suppose le résultat vrai à l'ordre p pour toute suite u.

On a $(\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p (\Delta u))_n$

On applique l'hypothèse de récurrence à l'ordre p à la suite Δu

$$(\Delta^{p+1} u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} (\Delta u)_{n+k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} (u_{n+k+1} - u_{n+k})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k+1} - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}.$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{p+1-k} \binom{p}{k-1} u_{n+k} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+1-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$$

$$(\Delta^{p+1} u)_n = \binom{p}{p} u_{n+p+1} + \left(\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p+1-k} \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k}\right) u_{n+k}\right) + (-1)^{p} \binom{p}{0} u_n$$

On utilise les relations sur les coefficients binomiaux.

$$\binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1} \qquad \binom{p}{0} = 1 = \binom{p+1}{0} \qquad \binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} = \binom{p+1}{k}$$

et on obtient bien

$$(\Delta^{p+1} u)_n = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} \binom{p+1}{k} u_{n+k}$$

ce qui est le résultat à l'ordre $p+1$.

2b) $(\Delta u)_n = b^{n+1} - b^n = (b-1) b^n$ donc $\Delta u = (b-1) u.$

Par récurrence $\forall p \in \mathbb{N}$ $\Delta^p u = (b-1)^p u$

et $\forall p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (-1)^p (\Delta^p u)_n = (1-b)^p b^n \geq 0$

et u est absolument monotone.

3a) $$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^1 t^k \omega(t)\, dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{N} (-t)^k\right) \omega(t)\, dt$$

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{(1-(-t)^{N+1})}{1+t} \omega(t)\, dt = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt + R_N$$

Avec $|R_n| \leq \int_0^1 \frac{t^{N+1} |\omega(t)|}{1+t} dt \leq \sup_{t \in [0,1]} |\omega(t)| \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{\|\omega\|_\infty}{N+2} \geq R_N$

Donc $\lim_{N \to +\infty} R_N = 0$ et $$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} dt$$

3b) Pour t dans $[0,1]$ notons T la suite $(t^n)_{n\geq 0}$

Par linéarité de l'intégrale et de l'opérateur Δ (et donc de Δ^p)

on a $$(\Delta^p u)_n = \int_0^1 (\Delta^p T)_n \, \omega(t)\, dt .$$

et $$\underline{(-1)^p (\Delta^p u)_n} = \int_0^1 \underline{(1-t)^p t^n \omega(t)\, dt} \qquad (*)$$

Or $t \mapsto (1-t)^p t^n \omega(t)$ est positive sur $[0,1]$, donc :

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad (-1)^p (\Delta^p u)_n \geq 0$, u est absolument monotone.

3c) $\forall t \in [0,1]$ $$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2+(t-1)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1-\frac{(1-t)}{2}\right)}$$

Or $\frac{1-t}{2} \neq 1$ si $t \in [0,1]$ donc

$$\underline{\frac{1}{1-\frac{(1-t)}{2}} = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1-t}{2}\right)^k + \frac{\left(\frac{1-t}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{(1-t)}{2}}}$$

puis $$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\, dt = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{N} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\, dt + \underbrace{\int_0^1 \frac{\left(\frac{1-t}{2}\right)^{N+1}}{(1+t)}\, \omega(t)\, dt}_{R'_N}$$

$\forall t \in [0,1]$ $\frac{1-t}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$. On peut donc en déduire, puisque ω est positive : $$0 \leq R'_N \leq (1-0) \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \times \sup_{t\in[0,1]} \omega(t)$$

et par conséquent $\lim_{N\to+\infty} R'_N = 0$ et

$$\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\, dt = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\, dt}$$

3d) On a vu en 3b) (formule $(*)$ ci-dessus) que $\underline{(-1)^p (\Delta^p u)_0 = \int_0^1 (1-t)^p \omega(t)\, dt}$

Il découle immédiatement de la question précédente que

$$\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0}$$

4) On choisit $\omega(t) = 1$, on obtient

$$\forall k \quad u_k = \int_0^1 t^k\,dt = \frac{1}{k+1}.$$

$$\forall k \quad (-1)^k(\Delta^k u)_0 = \int_0^1 (1-t)^k\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

La formule de question 3d, couplée avec celle de 3a, donne

$$\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

Soit en résumé :

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)\,2^{p+1}}$$

5a) On a remarqué en 3.d) que $\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^k \omega(t)\,dt = \frac{1}{2^{k+1}} (\Delta^k u)_0$

l'égalité $\mathcal{E}_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$ en découle.

5b) D'après 3c) on peut écrire.

$$S - \mathcal{E}_n = \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 (1-t)^{n+1} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,dt \right)$$

Or $\forall t \in [0,1]$ $0 \leq (1-t)^{n+1} \leq 1$ et $\omega(t)$ est positif, donc

$$0 \leq (1-t)^{n+1} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t) \leq \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)$$

$$0 \leq \int_0^1 (1-t)^{n+1} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,dt \leq \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,dt$$

puis par sommation

$$0 \leq S - \mathcal{E}_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\,dt = \frac{S}{2^{n+1}}$$

et en particulier $|S - \mathcal{E}_n| \leq \frac{S}{2^{n+1}}$

Deuxième partie : transformée d'Euler

6a) $(\Delta^p U)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$ Or $\lim_{n\to+\infty} u_{n+k} = 0$

car $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$ converge, donc, par linéarité $\lim_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = 0$

6b) On suppose $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall p \geq n_0 \quad \left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k\right| \leq \left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{n_0-1}\binom{p}{k} r_k\right| + \left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=n_0}^{p}\binom{p}{k} r_k\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{n_0-1}\binom{p}{k} r_k\right| + \frac{1}{2^p}\sum_{k=n_0}^{+p}\binom{p}{k}|r_k|$$

$$\forall p \geq n_0 \quad \left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k\right| \leq \left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{n_0-1}\binom{p}{k} r_k\right| + \left(\frac{1}{2^p}\sum_{k=n_0}^{p}\binom{p}{k}\right)\frac{\varepsilon}{2}$$

Or d'une part $\sum_{k=n_0}^{p}\binom{p}{k} \leq \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = 2^p$ donc $\frac{1}{2^p}\sum_{k=n_0}^{p}\binom{p}{k} \leq 1$

et d'autre part : $\forall k \in [0, n_0-1]$ $\forall p \geq n_0$ $\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ \ (p-k+1)}{k!} = P_k(p)$

où P_k est un polynôme de degré k.

$\sum_{k=0}^{n_0-1}\binom{p}{k} r_k$ est donc une fonction polynomiale de p de degré au plus n_0-1. Par conséquent $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{n_0-1}\binom{p}{k} r_k = 0$.

Il existe donc un entier p_1 tel que $\forall p \geq p_1$ $\left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{n_0-1}\binom{p}{k} r_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists p_1 \quad \forall p \geq p_1 \quad \left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k} r_k\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k} r_k = 0$.

(On reconnait la démonstration du théorème de Cesàro.)

7a) $\sum_{r=0}^{p} \left(\frac{(-1)^r}{2^r}(\Delta^r u)_n - \frac{(-1)^{r+1}}{2^{r+1}}(\Delta^{r+1} u)_n \right)$ est

une somme télescopique qui vaut

$$\frac{(-1)^0}{2^0}(\Delta^0 u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n.$$

Or $\frac{(-1)^0}{2^0}(\Delta^0 u)_n = u_n$.

et $\frac{1}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n = \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} \binom{p+1}{k} u_{n+k}$.

Or d'après la question précédente, puisque $\lim_{k\to+\infty} u_{n+k} = 0$, on

a $\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} \binom{p+1}{k} u_{n+k} = 0$.

On en déduit que $\sum_{r\geq 0} \left(\frac{(-1)^r}{2^r}(\Delta^r u)_n - \frac{(-1)^{r+1}}{2^{r+1}}(\Delta^{r+1} u)_n \right)$

est convergente de somme u_n, comme souhaité

7b) Etudions tout d'abord le cas $p = 0$, il s'agit de prouver la convergence et de calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left((\Delta^0 u)_n + \frac{1}{2}(\Delta^1 u)_n \right) \text{ soit } \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(u_n + \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) \right)$$

ou encore $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \right)$.

Or $\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \left(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} \right) = \frac{1}{2}u_0 + \frac{(-1)^N}{2}u_{N+1}$ (somme télescopique)

et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left((\Delta^0 u)_n + \frac{1}{2}(\Delta^1 u)_n \right)$ et et

sa somme est $\frac{1}{2}u_0 = \frac{(-1)^0}{2^{0+1}}(\Delta^0 u)_0$. le résultat est vrai pour

$p = 0$.

On obtient le résultat à un ordre p quelconque en remplaçant la suite u par la suite $\frac{(-1)^p}{2^p}\Delta^p u$. On a le droit car

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(-1)^p}{2^p}\Delta^p u \right)_n = 0$ d'après la question 6a)

8a)
$$E_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_m - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_m \right)$$ (question précédente)

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\sum_{p=0}^{n} \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p u)_m - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1} u)_m \right) \right)$$ (permutation possible car une des sommes est finie)

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left((\Delta^0 u)_m - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (\Delta^{n+1} u)_m \right)$$ (sommes télescopiques)

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(u_m + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} (-1)^{n+1-p} u_{m+p} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m u_m - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^{m+p} u_{m+p}.$$

$$E_n = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m u_m - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \left(\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k \right)$$ (Toutes les séries convergent, ce sont les restes de la séries $\sum_{n\geq 0} (-1)^n u_n$).

$$E_n - S = -\frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \right) \left(\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k \right)$$

8b) Or $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k = 0$ (suite des restes d'une série convergente)

donc d'après le résultat de la question 6b)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \right) \left(\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k \right) = 0$$

c'est à dire. $S = \lim\limits_{n\to+\infty} E_n.$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$$

Troisième partie : une amélioration de la méthode.

9a) D'après le résultat de la question 3a) $S = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,dt$

$S = \frac{P_n(-1)}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,dt$, d'où immédiatement $S - T_n = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)} \frac{\omega(t)}{1+t}\,dt$.

9b) $|S - T_n| \leq \int_0^1 \frac{|P_n(t)|}{|P_n(-1)|} \frac{\omega(t)}{1+t}\,dt \leq \frac{M_n}{|P_n(-1)|} \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,dt = \frac{M_n}{|P_n(-1)|} S$

10) $P_n(x) = (1-x)^n \quad M_n = 1 \quad P_n(-1) = 2^n$.

$$|S - T_n| \leq \frac{1}{2^n} S.$$

11) $P_n(x) = (1-2x)^n \quad M_n = 1. \quad P_n(-1) = 3^n.$

$$|S - T_n| \leq \frac{S}{3^n}.$$ (c'est mieux)

12a) . L'unicité résulte de ce que si deux polynômes vérifie cette relation il sont égaux sur $[0,1]$ qui est infini. Ils sont donc égaux.

. L'existence se montre par récurrence sur n.

le résultat est vrai pour $n=0$ $\quad P_0 = 1. \quad \deg P_0 = 0$

le résultat est vrai pour $n=1$ $\quad P_1 = (1-2X) \quad \deg P_1 = 1$

On suppose le résultat vrai à l'ordre n et à l'ordre $n+1$

alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos 2(n+2)t = 2\cos 2t \cos(2(n+1)t) - \cos 2nt$.

(d'après la formule $\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$)

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos 2(n+2)t = 2(1-2\sin^2 t)\cos(2(n+1))t - \cos 2nt$

On peut donc prendre $P_{n+2} = 2(1-2X)P_{n+1} - P_n$.

On a bien $\deg P_{n+2} = n+2$.

12b) $P_n(-1) = a_n$ vérifie $a_0 = 1 \quad a_1 = 3 \qquad a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$

C'est une récurrence linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 1$. $\quad a_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \qquad r_1 = 3 + \sqrt{8} \qquad r_2 = (3 - \sqrt{8})$.

$a_0 = 1 = \lambda + \mu$. $a_1 = 3 = \frac{r_1 + r_2}{2} = \lambda r_1 + \mu r_2$. Facilement $a_n = \frac{1}{2}(r_1^n + r_2^n)$

12c) $|S - T_n| \leq \frac{1}{a_n} S \leq \frac{2}{(3+\sqrt{8})^n} S$ $\quad$ (car $r_1^n + r_2^n \geq r_1^n$)

(Car $\forall x \in [0,1] \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \quad x = \sin^2 t$ donc $M_n = 1$.)

Quatrième partie : comparaison des méthodes sur un exemple.

13) Cas de S_n :

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n+2+k} = (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n+2+2p} - \frac{1}{n+2+2p+1} \right)}_{v_p}$$

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{n+2+2x} - \frac{1}{n+2+2x+1} = \frac{1}{(n+2+2x)(n+2+2x+1)}$ est

continue et décroissante sur $[0, +\infty[$. On va pouvoir encadrer v_n à l'aide d'intégrale.

$$\int_p^{p+1} f(x)\,dx \leq v_p = f(p) \leq \int_{p-1}^{p} f(x)\,dx$$

$$\int_0^N f(x)\,dx + f(N) \leq \sum_{p=0}^{N} f(p) \leq \int_0^N f(x)\,dx + f(0)$$

$$\int_0^N f(x)\,dx = \int_0^N \frac{dx}{n+2+2x} - \int_0^N \frac{dx}{n+2+2x+1} = \frac{1}{2}\ln \frac{2N+2+n}{2N+3+n} + \frac{1}{2}\ln\frac{n+3}{n+2}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \leq |S - S_n| \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Or $\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) = \ln\left(1+\frac{3}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $|S - S_n| \sim \frac{1}{2n}$

et $\boxed{S - S_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}}$

Cas de E_n :

$$S - E_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+1+\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \leq S - E_n \leq \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{(n+2)} \frac{1}{2^{n+1}} = \beta_n.$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+1+\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \geq \frac{1}{n+2+\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \frac{1}{2^{n+2}} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = \alpha_n$$

Or $\alpha_n \sim \frac{1}{n} \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n \sim \frac{1}{n} \frac{1}{2^{n+1}}$

Donc
$$\boxed{S - E_n \sim \frac{1}{n2^{n+1}}}$$

—

les majorations obtenues en 10, 11 et 12 de $|S - T_n|$, montre que (T_n) converg toujours nettement plus vite que (S_n) et plus vite que E_n dans le cas des polynômes $(1-2x)^n$ et P_n, mais peut-être pas dans le cas des polynômes $(1-x)^n$

—

Affinons ce résultat.

<u>Equivalent de $(S - T_n)$ dans le cas où $P_n = (1-x)^n$.</u>

$$S - T_n = \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1+t} dt$$

$$\text{Or} \quad \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1+t} dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)(1+t)} \right]_0^1 - \frac{1}{(n+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(1+t)^2} dt$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1+t}\,dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{1+t}\,dt.$$

Or a déjà prouvé $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{1+t}\,dt \leq \frac{1}{n+2}$, donc :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{1+t}\,dt = \frac{1}{n+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

On a donc. $\boxed{S - T_n \sim \frac{1}{2^n \times n} \sim 2\,(S - E_n)}$

Pour cette suite de polynômes il n'y a pas d'intérêt à remplacer E_n par T_n.

—

<u>Equivalent de $(S - T_n)$ dans le cas où $P_n = (1-2x)^n$.</u>

$$S - T_n = \frac{1}{3^n}\int_0^1 \frac{(1-2t)^n}{1+t}\,dt.$$

On emploie la même technique d'intégration par parties.

$$\int_0^1 \frac{(1-2t)^n}{1+t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}\,\frac{(1-2t)^{n+1}}{(1+t)(n+1)}\right]_0^1 - \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \frac{(1-2t)^{n+1}}{(1+t)^2}\,dt$$

$$= +\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\right]\frac{1}{(n+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc
$$\boxed{\begin{aligned} S - T_{2n} &\sim \frac{1}{3^{2n}} \times \frac{3}{8n} \\ S - T_{2n+1} &\sim \frac{1}{3^{2n+1}} \times \frac{1}{8n} \end{aligned}}$$

Cas de la suite P_n avec $P_n(\sin^2 t) = \cos 2nt$

$$S - T_n = \frac{1}{P_n(-1)}\int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t}\,dt.$$ Soit $$I_n = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{1+t}\,dt.$$

Effectuons le changement de variable $t = \sin^2 u$ $\quad dt = 2\sin u\cos u\,du$

$$I_n = 2\int_0^{\pi/2} \cos(2nu)\,\frac{\sin u\cos u}{1+\sin^2 u}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nu)\,g(u)\,du \quad \text{avec } g(u) = \frac{2\sin u\cos u}{1+\sin^2 u}.$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nu)\,f(u)\,du$.

Une intégration par partie donne $$J_n = \left[\frac{\sin(2nu)}{2n}f(u)\right] - \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nu)\,f'(u)\,du$$

Soit $$J_n = -\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nu)\,f'(u)\,du.$$ En particulier $|J_n| \leq \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(u)|\,du$

donc $J_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Une deuxième intégration par parties donne :

$$J_n = +\frac{1}{2n}\left\{\left[\frac{\cos(2nu)}{2n}f'(u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nu)\,f''(u)\,du}_{=O\left(\frac{1}{n}\right)}\right\}$$

$$J_n = \frac{1}{4n^2}\left((-1)^n f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'(0)\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ici, pour $f = g$, $\quad f'(0) = 2 \quad$ car $g(u) \underset{0}{\sim} 2u$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{car } g\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = \frac{-2\cos u\sin u}{1+\cos^2 u} = -u + o(u)$$

donc $$I_n = -\frac{1}{4n^2}\left(2 + (-1)^n\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit

$$S - T_{2n} \sim -\frac{3}{16n^2} \times \frac{1}{P_{2n}(-1)} \sim -\frac{3}{8n^2}\,\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^{2n}}$$

$$S - T_{2n+1} \sim -\frac{1}{16n^2} \times \frac{1}{P_{2n+1}(-1)} \sim -\frac{1}{8n^2}\,\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^{2n+1}}$$