Exercices classiques I

Les exercices peuvent être résolus dans n'importe quel ordre. Ils sont de difficultés inégales.

Exercice 1:
En utilisant la majoration de Taylor-Lagrange montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 2:
1) Nature de la suite définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$.
2) Nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$?

Exercice 3: Résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ l'équation

$$X^2 = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On ne donnera que la forme générale de la/des solution(s), sans pousser les calculs à leur terme.

Exercice 4: Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.
1) Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide celui de A.
2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B à l'aide des valeurs propres et des sous-espaces propres.
3) En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est inversible et diagonalisable.

Exercice 5: Déterminer sous la forme d'une intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \sin x \, dx.$$

Exercice 6:
Montrer qu'il existe une suite (a_n) de réels telle que

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Tourner la page, S.V.P.

Exercice 7:
Soit
$$\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$
1) Montrer que la suite (α_n) est convergente, on note α sa limite.
2) Déterminer un équivalent de $\alpha_n - \alpha$.

Exercice 8:
Nature, suivant la valeur du paramètre réel strictement positif α, de la série
$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right).$$

Exercice 9:
Montrer que la suite $(\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$, où $\alpha \in]0,\pi[$, n'a pas de limite.

Exercice 10:
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Déterminer, en adaptant la démonstration du lemme de Cesàro :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (n+1)t^n f(t)\, dt.$$
Vous devez impérativement adapter la méthode du lemme de Cesàro sur les suites. Il est interdit par exemple de faire un changement de variable et d'utiliser le théorème de convergence dominée.

Exercice 11: Calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt.$
Indication : Montrer que I est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 12:
Soit $E = \{f \in C^\infty([0,1],\mathbb{R}); \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0\}$ Soit
$$f_0 : x \mapsto \exp(-1/x^2) \text{ si } x \in]0,1], 0 \text{ si } x = 0.$$
Montrer soigneusement que f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ puis que f_0 est dans E.