Exercices classiques II

Exercice 1:
Soit f une fonction tendant vers 0 en $+\infty$ et a un réel strictement positif. Montrer que toute solution de

$$y' + ay = f(x)$$

tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 2:
1) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$, symétrique. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$.
2) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$, antisymétrique. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset i\mathbb{R}$.
3) Soit M dans $M_n(\mathbb{R})$, orthogonale. Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Exercice 3:
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Quelle loi suit $X + Y$.

Exercice 4:
Soit X une variable aléatoire d'espérance finie à valeur dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

Exercice 5:
Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, non nécessairement indépendantes. On suppose : $\forall i \in \mathbb{N}\ P(X = i) \neq 0$.
Pour i donné on note, s'il est défini :

$$E(Y|X = i) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(Y = k|X = i)$$

Montrer que Y possède une espérance finie si et seulement si $\sum_{i\geq 0} E(Y|X = i)P(X = i)$ converge et qu'on a alors :

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} E(Y|X = i)P(X = i).$$

Cette formule est connue sous le nom de formule des espérances totales.

Exercice 6:
Soit S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques réellles positives (c'est-à-dire à valeurs propres positives) . Soit A dans S_n^+. Montrer l'existence et l'unicité d'un X dans S_n^+ tel que $X^2 = A$.

Exercice 7:
Montrer que si

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est diagonalisable alors $A = 0$.
Indication : Etudier $P(B)$ où P est un polynôme bien choisi.

Exercice 8:
Soit l'équation différentielle : $2y'' + xy' + 2y = 0$.
1) Déterminer les solutions maximales de cette équation.
2) Résoudre en remplaçant le second membre par une fonction f quelconque, continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9:
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, à valeurs réelles, telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe, pour tout x de $]0,1[$, un c de $]0,1[$ tel que $f(x) = f''(c)\dfrac{x(x-1)}{2}$.

Exercice 10:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
2) Si λ est valeur propre de A, que dire de la dimension du sous-espace propre associé ?

Exercice 11:
1) Prouver en intégrant directement la somme partielle d'une suite géométrique. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.
2) On pose $u_n = \ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ et calcul de sa somme.

Exercice 12:
Majorer $\left|\frac{\ln(x^2+t^2)|}{1+t^2}\right|$ par une fonction de t indépendante de x, sachant que x est dans l'intervalle $[-a,a]$.
Cette fonction majorante est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$?
Indication : On commencera par encadrer $\ln(x^2+t^2)$, en utilisant la croissance du logarithme.