ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2006 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Polynômes à coefficients 1 ou -1

Les polynômes étudiés dans ce problème ont été introduits lors de recherches sur la spectroscopie multi-fentes. Ils ont donné lieu à des développements mathématiques en combinatoire, théorie des codes, analyse harmonique, et à de très nombreuses applications en optique, télécommunications, théorie des radars et acoustique.

Toute affirmation devra être soigneusement justifiée. La précision, la clarté et la concision des raisonnements seront particulièrement appréciées.

Soit ℓ un entier au moins égal à 1. Dans ce problème, un vecteur $\underline{a}$ de $\mathbf{R}^\ell$ sera appelé *séquence de longueur* ℓ si chacune de ses ℓ coordonnées vaut 1 ou -1. Les coordonnées d'une séquence $\underline{a}$ de longueur ℓ seront numérotées de 0 à $\ell-1$, $\underline{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{\ell-1})$. On notera $\mathcal{S}_\ell$ l'ensemble des séquences de longueur ℓ. On appellera simplement *séquence*, tout vecteur qui est une séquence de longueur ℓ, pour un certain entier $\ell \geqslant 1$.

On dira que des séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une *paire complémentaire* si elles ont même longueur ℓ (qui sera appelée dorénavant *longueur de la paire*) et si elles vérifient, dans le cas où $\ell > 1$, pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant \ell-1$, la j-ième condition de corrélation :

$$\sum_{i=0}^{\ell-1-j} (a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}) = 0.$$

Par convention, tout couple de séquences de longueur 1 est une paire complémentaire. Ainsi, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, la complémentarité d'une paire de longueur ℓ implique $\ell-1$ conditions de corrélation.

Première partie

On désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des entiers ℓ pour lesquels il existe au moins une paire complémentaire de longueur ℓ. Autrement dit, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des longueurs de paires complémentaires. Dans cette partie, on se propose d'étudier certaines propriétés de l'ensemble $\mathcal{L}$.

1. Montrer que 2 appartient à $\mathcal{L}$ et que 3 n'appartient pas à $\mathcal{L}$.

Soit ℓ un entier au moins égal à 1. Pour toute séquence, $\underline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{\ell-1})$, de longueur ℓ, on définit le polynôme $P_{\underline{a}}$ par la formule

$$P_{\underline{a}}(X) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i X^i \ .$$

Un tel polynôme est appelé *polynôme séquentiel.*

2.a) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences. On considère la fonction définie pour x réel, $x \neq 0$, par

$$x \mapsto P_{\underline{a}}(x)P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x)P_{\underline{b}}(x^{-1}) \ .$$

Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ ne sont pas deux séquences de même longueur, cette fonction n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.

Montrer que deux séquences $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de même longueur forment une paire complémentaire si et seulement si cette fonction est constante. Exprimer cette constante en fonction de la longueur ℓ de la paire complémentaire $\underline{a}, \underline{b}$.

2.b) Montrer que si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont des séquences de même longueur, $P_{\underline{a}}(1)$ et $P_{\underline{b}}(1)$ sont des entiers de même parité. En déduire que tout élément de $\mathcal{L}$ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

2.c) Montrer que le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathbf{N}$ est un ensemble infini [on pourra étudier le reste de la division par 4 d'un carré d'entier].

3.a) Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences de même longueur. On pose $U = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} + P_{\underline{b}})$ et $V = \frac{1}{2}(P_{\underline{a}} - P_{\underline{b}})$. Montrer que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ forment une paire complémentaire si et seulement si la fonction

$$x \mapsto U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1})$$

est constante sur son domaine de définition.

3.b) Les séquences, de longueur 10,

$$\underline{a} = (1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1)$$

et

$$\underline{b} = (1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1)$$

forment-elles une paire complémentaire ?

4. Démontrer, pour toute séquence $\underline{v}$ de longueur paire $2m$ ($m \in \mathbf{N}$, non nul), l'équivalence des assertions suivantes :

(i) 4 divise la somme $v_0 + v_1 + \cdots + v_{2m-1}$,

(ii) le nombre de coordonnées de $\underline{v}$ égales à -1 a la même parité que m,

(iii) $v_0\, v_1 \cdots v_{2m-1} = (-1)^m$.

5. Soit $\ell \in \mathcal{L}$, $\ell \geqslant 2$, et soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ des séquences qui forment une paire complémentaire de longueur ℓ. Pour tout entier i, $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$, on pose $x_i = a_i b_i$.

5.a) Montrer que, pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$,

$$\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell-j}$$

[considérer la somme des coordonnées de la séquence $(a_0 a_j, \ldots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \ldots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1})$].

5.b) En déduire que, pour tout entier j, $0 \leqslant j \leqslant \ell - 1$,

$$x_j x_{\ell-1-j} = -1 \ .$$

5.c) Montrer que tout élément ℓ de $\mathcal{L}$, $\ell \geqslant 2$, est pair.

Deuxième partie

Si deux polynômes séquentiels sont associés à des séquences qui forment une paire complémentaire, on dit qu'ils forment une *paire complémentaire de polynômes*. Cette partie est consacrée à l'étude de certaines paires complémentaires de polynômes, dites *paires de Rudin-Shapiro*.

On définit deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par les conditions initiales

$$P_0(X) = Q_0(X) = 1$$

et les relations de récurrence

$$P_{n+1}(X) = P_n(X) + X^{2^n} Q_n(X), \tag{1}$$

$$Q_{n+1}(X) = P_n(X) - X^{2^n} Q_n(X). \tag{2}$$

6.a) Calculer P_1 et Q_1, puis P_2 et Q_2.

6.b) Calculer les valeurs respectives de $P_n(1)$, $Q_n(1)$, $P_n(-1)$ et $Q_n(-1)$ en fonction de l'entier n.

7. Démontrer que, pour tout entier positif n, les polynômes P_n et Q_n sont des polynômes séquentiels et qu'ils forment une paire complémentaire. Qu'en déduire vis-à-vis de l'appartenance des entiers de la forme 2^k, pour k entier positif ou nul, à l'ensemble $\mathcal{L}$?

8. Démontrer, pour tout entier positif ou nul n et tout nombre complexe non nul $z \in \mathbf{C}$, l'égalité

$$Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-z^{-1}).$$

9.a) Soit T un polynôme quelconque de $\mathbf{C}[X]$, de degré exactement d, $d \geqslant 1$, qu'on écrit $T(X) = t_0 + t_1 X + \cdots + t_d X^d$ (avec t_d non nul). Montrer que les racines de T sont toutes majorées en module par la quantité $1 + \sup_{0 \leqslant i \leqslant d-1} |t_i / t_d|$.

9.b) Démontrer, pour toute valeur de l'entier n, que toute racine (complexe) z du polynôme $P_n Q_n$ vérifie

$$\frac{1}{2} \leqslant |z| \leqslant 2.$$

Peut-on remplacer chacune de ces deux inégalités larges par une inégalité stricte ?

10.a) Montrer qu'il existe une série entière, $S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} u_p z^p$, dont les P_n sont des sommes partielles. Identifier son rayon de convergence.

10.b) La somme de la série S a-t-elle des zéros dans le disque ouvert de rayon $1/2$ centré à l'origine ?

* * *

L'ensemble $\mathcal{L}$ étudié dans ce problème est encore actuellement l'objet de recherches.

* *
*