MP* 2 Devoir en temps libre n° 1 2017 / 2018

Polytechnique PC 2006

Première partie

1) * $((1,1),(1,-1))$ est une paire complémentaire, donc $2 \in \mathcal{L}$.

* $((a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2))$ est une paire complémentaire ssi

$$\begin{cases} a_0 a_1 + a_1 a_2 + b_0 b_1 + b_1 b_2 = 0 & (1) \\ a_0 a_2 + b_0 b_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Si $a_0 = a_2$ $(=\pm 1)$ alors $b_0 b_2 = -1$ donc $b_0 = -b_2$.

donc 1 devient $2 a_0 a_1 = 0$ impossible

Si $a_0 = -a_2$ alors $b_0 = b_2$ et $2 b_0 b_1 = 0$ impossible

Donc $3 \notin \mathcal{L}$.

2a) * Soit ℓ_a et ℓ_b les longueurs de $\underline{a}$ et $\underline{b}$

$$P_{\underline{a}}(x) P_{\underline{a}}(x^{-1}) = \sum_{i=-\ell_a+1}^{\ell_a+1} \alpha_i x^i$$ avec par exemple

$\alpha_{\ell_a-1} = a_{\ell_a-1} a_0 \neq 0$ Donc $\lim\limits_{x \to +}$

Donc si $\ell_a > \ell_b$ $\quad P_{\underline{a}}(x) P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x) P_{\underline{b}}(x^{-1}) = \sum_{i=-\ell_a+1}^{\ell_a-1} \gamma_i x^i$

avec $\gamma_{\ell_a-1} = \alpha_{\ell_a-1} \neq 0$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \left| P_{\underline{a}}(x) P_{\underline{a}}(x^{-1}) + P_{\underline{b}}(x) P_{\underline{b}}(x^{-1}) \right| = +\infty$$

et la fonction considérée n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$.

* Le changement $x \mapsto x^{-1}$ implique $\gamma_{-j} = \gamma_j$ $\quad 1 \leq j \leq \ell_a - 1$.

Si $(\underline{a}, \underline{b})$ est complémentaire $\ell_{\underline{a}} = \ell_{\underline{b}}$, et lorsque $\ell_{\underline{a}} = \ell_{\underline{b}} = \ell$

$\forall j \in [1, \ell-1]$ $\quad \gamma_j = \sum_{i=0}^{\ell-1-j} a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}$ $(= \gamma_{-j})$.

Donc (a, b) est complémentaire ssi cette fonction est constante (et sa valeur est alors $\sum_{i=0}^{\ell-1} (a_i^2 + b_i^2) = 2\ell$.)

2b) $P_a(1) = \sum_{i=0}^{l_a - 1} a_i$ est de même parité que l_a. (2)

(Ce résultat se prouve par récurrence car $x \pm 1$ est de la parité opposée à celle de x, pour tout x dans $\mathbb{Z}$)

Donc si $l_a = l_b$ alors $P_a(1)$ et $P_b(1)$ sont de même parité (on remarquera qu'il suffit que l_a et l_b soient de même parité).

Si $P_a(1) = 2k_a$ alors $P_b(1) = 2k_b$ et

$2l = P_a(1)^2 + P_b(1)^2 = 4(k_a^2 + k_b^2)$

$l = 2(k_a^2 + k_b^2) = (k_a + k_b)^2 + (k_a - k_b)^2$

Si $P_a(1) = 2k_a + 1$ alors $P_b(1) = 2k_b + 1$ et

$2l = 4k_a^2 + 4k_a + 1 + 4k_b^2 + 4k_b + 1$

$l = 2k_a^2 + 2k_a + 2k_b^2 + 2k_b + 1$

$l = (k_a + k_b + 1)^2 + (k_a - k_b)^2$

Dans les deux cas l est bien la somme de deux carrés

2c). Un carré d'entier ne peut être congru que à 0 ou à 1 modulo 4.

Donc si l appartient à $\mathcal{L}$ alors l est congru à 0, 1 ou 2 modulo 4.

le complémentaire de $\mathcal{L}$ contient donc au moins tous les entiers congrus à 3 modulo 4. En particulier il est infini.

3a) $U(x)U(x^{-1}) + V(x)V(x^{-1}) = \frac{1}{2}\left(P_a(x)P_a(x^{-1}) + P_b(x)P_b(x^{-1})\right)$

le résultat demandé découle immédiatement de la question 2a)

3.b) $U(x) = 1 + x - x^2 + x^3 + x^5$

$V(x) = -x^5 - x^7 - x^8 + x^9 + x^{10} = -x^5(1 + x^2 + x^3 - x^4 - x^5)$

$U(x)U(x^{-1}) = (1 + x - x^2 + x^3 + x^5)\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)$

$V(x)V(x^{-1}) = (-x^5)\left(-\frac{1}{x^5}\right)(1 + x^2 + x^3 - x^4 - x^5)\left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)$

$U(x)U(x^{-1}) = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 5 - x + x^2 + x^4 + x^5$

$V(x)V(x^{-1}) = -\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 5 + x - x^2 - x^4 - x^5$

$U(x)U(x^{-2}) + V(x)V(x^{-2}) = 10.$

Donc (a, b) forme une paire complémentaire.

(Intérêt de cette question ?)

4) • Soit v de longueur $2m$ $(m \in \mathbb{N}^*)$, soit p le nombre d'indice i tel que $v_i = 1$.

Alors $v_0 + v_1 + \cdots + v_{2m-1} = p + p - 2m = 2(p-m)$

Donc $4 \mid v_0 + \cdots + v_{2m-1} \iff 2 \mid (p-m)$

Soit $(i) \iff (ii)$

• $v_0 v_1 \cdots v_{2m-1} = (-1)^{p-2m} = (-1)^p$

et $(-1)^p = (-1)^m \iff 2 \mid p-m.$

Soit $(ii) \iff (iii)$.

5a) $(a_0 a_j, \ldots, a_{l-1-j} a_{l-1}, b_0 b_j, \ldots, b_{l-1-j} b_{l-1})$ est de longueur paire égale à $2(l-j)$. Sa somme est nulle donc divisible par 4. L'équivalence $i) \iff (iii)$ donne

$$\prod_{k=0}^{l-1-j} x_k x_{k+j} = \prod_{k=0}^{l-1-j} a_k a_{k+j} \prod_{k=0}^{l-1-j} b_k b_{k+j} = (-1)^{l-j}$$

5b) * Pour $j=1$ on obtient

$$\prod_{k=0}^{\ell-2} x_k x_{k+1} = -1 = x_0 x_{\ell-1} \prod_{k=1}^{\ell-2} x_k^2 = x_0 x_{\ell-1}.$$

On a donc. $x_0 x_{\ell-1}$.

* Pour $2 \leq j \leq \ell-1$ $\quad \left(\prod_{k=0}^{\ell-1-j+1} x_k x_{k+j-1}\right) / \left(\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j}\right) = -1$

Soit $\left(\prod_{k=0}^{\ell-1-j+1} x_k \prod_{k=j-1}^{\ell-1} x_k\right) / \left(\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k \prod_{k=j}^{\ell-1} x_k\right) = -1$

et finalement $\quad x_{\ell-1-j+1}\, x_{j-1} = -1.$

Par translation pour $1 \leq j \leq \ell-2$ $\quad x_j x_{\ell-1} = -1$

* Et finalement pour $j=\ell-1$ $\quad x_j x_{\ell-1-j} = x_{\ell-1} x_0 = -1.$

En conclusion pour $0 \leq j \leq \ell-1$ $\quad x_j x_{\ell-1-j} = -1.$

5c) Si $\ell \geqslant 2$ est impair $\ell = 2p+1$, alors pour $j=p$ on obtient $x_p x_p = -1 = x_p^2$ c'est impossible

Donc $\ell \in \mathcal{L}$ et $\ell \geqslant 2$ implique ℓ pair.

Deuxième partie

6a) $P_1 = 1+X$ $\quad Q_1 = 1-X$

$P_2 = 1+X+X^2-X^3$ $\quad P_3 = 1+X-X^2+X^3$

6b) $P_0(1) = 1 = Q_0(1)$ et pour $n \geq 0$ $\begin{cases} P_{n+1}(1) = P_n(1)+Q_n(1) \\ Q_{n+1}(1) = P_n(1) - Q_n(1) \end{cases}$

$P_1(1) = 2$ $\quad Q_1(1) = 0$, puis $P_2(1) = 2 = Q_2(1) = 2P_0(1) = 2Q_0(1)$.

D'où, par récurrence $\begin{cases} P_{2p}(1) = Q_{2p}(1) = 2^p \\ P_{2p+1}(1) = 2^{p+1} \quad Q_{2p+1}(1) = 0 \end{cases}$

7) Supposons $P_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n} X^k$ $\quad a_{k,n} \in \{-1, 1\}$ $\quad 0 \leq k \leq 2^n-1$

$Q_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} b_{k,n} X^k$ $\quad b_{k,n} \in \{-1, 1\}$ $\quad 0 \leq k \leq 2^n - 1$

(C'est-à-dire que P_n et Q_n sont des polynômes séquentiels de degré 2^n-1).

Alors

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n} X^k + \sum_{k=0}^{2^n-1} b_{k,n} X^{2^n+k} = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} a_{k,n+1} X^k$$

avec $a_{k,n+1} = a_{k,n}$ si $0 \leq k \leq 2^n - 1$ $\quad a_{k,n+1} = b_{k-2^n,n}$ si $2^n \leq k \leq 2^{n+1}-1$

Donc P_{n+1} est un polynôme séquentiel (de degré $2^{n+1}-1$, donc associé à une séquence de longueur 2^{n+1}). Le même raisonnement prouve que Q_{n+1} est séquentiel (de degré $2^{n+1}-1$).

Or $P_0 = 1$ et $Q_0 = 1$, donc, par récurrence, pour tout entier n P_n et Q_n sont séquentiels.

Montrons, à nouveau par récurrence, que pour tout n. (P_n, Q_n) est une paire complémentaire.

C'est le cas pour (P_0, Q_0) qui associée à $((1),(1))$ qui est complémentaire.

On suppose le résultat vrai à l'ordre n, $n \geq 0$.
(P_n, Q_n) est complémentaire.

(P_{n+1}, Q_{n+1}) est une paire complémentaire si et seulement si
$\Phi_{n+1} : x \mapsto U_{n+1}(x)\, U_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) + V_{n+1}(x)\, V_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante, où

$U_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(P_{n+1}(x) + Q_{n+1}(x)\right)$ $\quad$ $V_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(P_{n+1}(x) - Q_{n+1}(x)\right)$

Or $U_{n+1}(x) = P_n(x)$ $\quad$ $V_{n+1}(x) = x^{2^n} Q_n(x)$

Donc $\Phi(x) = P_n(x)\, P_n\left(\frac{1}{x}\right) + Q_n(x)\, Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est constant car (P_n, Q_n) est une paire complémentaire.

D'après 3) (P_{n+1}, Q_{n+1}) est donc aussi une paire complémentaire, ce qui achève la démonstration par récurrence.

8) Rq. Le résultat à démontrer n'a pas de sens pour $z = 0$.
On peut donc se limiter à $z \in \mathbb{C}^*$. On peut aussi remarquer que sur $\mathbb{C}^*$ les deux membres sont des fonctions polynomiales. Si elles sont égales alors les polynômes associés sont égaux. C'est peut-être ce que voulait dire l'auteur du sujet.

Le résultat demandé est vrai pour $n = 0$. Il suffit donc de le démontrer pour $n \geq 1$.
S'il est vrai, en effectuant la substitution $z \mapsto -\frac{1}{z} = -z^{-1}$
on obtient $P_n(z) = (-1)^{n-1} z^{2^n - 1} Q_n(z^{-1})$ $\quad$ (car $(-1)^{2^n - 1} = -1$ pour $n \geq 1$)

Démontrons donc par récurrence que pour $n \geq 1$

$$\begin{cases} P_n(z) = (-1)^{n-1} z^{2^n-1} Q_n(-\frac{1}{z}) \\ Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n(-\frac{1}{z}) \end{cases}$$ pour tout z de $\mathbb{C}^*$.

Pour $n = 1$ on a bien

$$\begin{cases} 1+z = 1 \times z\left(1-(-\frac{1}{z})\right) \\ 1-z = -1 \times z\left(1+(-\frac{1}{z})\right) \end{cases}$$ le résultat est vrai.

On suppose le résultat vrai à l'ordre n, $n \geq 1$ alors

$$P_{n+1}(z) = P_n(z) + z^{2^n} Q_n(z)$$
$$= (-1)^{n-1} z^{2^n-1} Q_n\left(-\frac{1}{z}\right) + z^{2^n} (-1)^n z^{2^n-1} P_n\left(-\frac{1}{z}\right)$$
$$P_{n+1}(z) = (-1)^n z^{2^{n+1}-1}\left(P_n\left(-\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z^{2^n}} Q_n\left(-\frac{1}{z}\right)\right) = (-1)^n z^{2^{n+1}-1} Q_{n+1}\left(-\frac{1}{z}\right)$$

(car $\frac{1}{z^{2^n}} = \left(-\frac{1}{z}\right)^{2^n}$ pour $n \geq 1$.

le résultat pour Q_{n+1} se démontre de la même manière, ou se déduit de celui-ci en effectuant la substitution $z \mapsto -\frac{1}{z}$.

9a) Soit α une racine de T. Supposons $|\alpha| > 1$ (sinon on a déjà $|\alpha| \leq 1 + \sup_{0 \leq i \leq d-1} \left|\frac{t_i}{t_d}\right|$) $= 1 + M$

$$\alpha^d = -\sum_{i=0}^{d-1} \frac{t_i}{t_d} \alpha^i, \quad \text{donc} \quad \alpha = -\sum_{i=0}^{d-1} \frac{t_i}{t_d} \alpha^{i-d+1}$$

Donc $|\alpha| \leq M \sum_{i=0}^{d-1} \left|\frac{1}{\alpha}\right|^{d-i-1} \leq M \sum_{j=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{\alpha}\right|^j = \frac{M}{1-\frac{1}{|\alpha|}}$

donc $|\alpha| \times \left(1 - \frac{1}{|\alpha|}\right) \leq M$, $|\alpha| - 1 \leq M$ et $|\alpha| \leq 1 + M$

q.e.d.

9.b) $P_n(0) = 1 = Q_n(0)$ donc 0 n'est pas racine de $P_n Q_n$.
Si z est racine de P_n (resp. Q_n) alors $\left(-\frac{1}{z}\right)$ est racine de Q_n (resp P_n) et réciproquement, car $-\frac{1}{-\frac{1}{z}} = z$.
Il suffit donc de montrer que toute racine de P_n ou de Q_n est de module au plus 2. Cela résulte immédiatement de la question précédente car pour P_n ou Q_n $M = 1$.
On peut remplacer dans chacune de ces inégalités les inégalités larges par des inégalités strictes, car pour $|\alpha| > 1$ on a $\sum_{i=0}^{d-1}\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{d-1-i} < \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{|\alpha|}}$

10 a) On a vu en 7) que si $P = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n} X^k$ alors
$a_{k,n} = a_{k,n+1}$ pour $0 \leq k \leq 2^n - 1$.
Donc si on pose $b_k = a_{k,m}$ pour un m tel que $k \leq 2^m - 1$ (par exemple $m = k$) alors pour tout n
$$\sum_{k=0}^{2^n-1} b_k z^k = P_n(z).$$
• ~~$\forall z$~~ la suite $(b_k z^k)_{k\geq 0}$ est bornée ssi $|z| \leq 1$ car pour tout k $|b_k| = 1$.

le rayon de convergence de cette série entière est donc 1.

10 b) $|z| < \frac{1}{2}$ et $S(z) = 0$ implique $1 = b_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^k$
donc $1 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |z|^k = \frac{|z|}{1-|z|}$, donc $|z| \geq \frac{1}{2}$ contradictoire.

Donc $\forall z \in \mathbb{C}$ $|z| < \frac{1}{2}$ $S(z) \neq 0$.