Centrale-Supélec 2011 — Option MP — Mathématiques I

Développement asymptotique du reste des séries de Riemann convergentes

I) Etude préliminaire

I A) Convergence des séries de Riemann

I A.1) + $\forall x \in [k-1, k]$, $k \geqslant a+1$ $\quad f(x) \geqslant f(k)$ donc.

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = f(k)$$

+ L'inégalité $f(k) \geqslant \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx$, $k \geqslant a$, se démontre de la même manière.

I.A.2) + Si $\alpha \leq 0$ la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \geqslant 1}$ ne tend pas vers 0

donc $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

+ Si $\alpha > 0$ $\quad x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Donc d'après I.A.1)

$$\underbrace{\int_{n}^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq}_{\text{si } n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \underbrace{\leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}}_{\text{si } n \geqslant 2}$$

Donc pour N entier, $N \geqslant 2$

$$\frac{1}{N^\alpha} + \int_{1}^{N} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{1}^{N} \frac{dx}{x^\alpha} + 1$$

Si $\alpha = 1$ $\quad \int_{1}^{N} \frac{dx}{x} = \ln N$, donc.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \ln N \quad \text{et} \quad \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$$

Donc si $\alpha = 1$ $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha \leq 1$ $\quad \forall n \geqslant 1$ $\quad \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$, donc $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha > 1$ $\quad \displaystyle\int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) + 1 \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1.$

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1.$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \dfrac{1}{n^\alpha} \geq 0$ donc $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}\right)_{N \geq 1}$ est croissante.

Comme elle est majorée on en déduit qu'elle converge.

Conclusion. $\quad \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ et dans ce cas

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} + 1$$

(peut servir plus tard !)

I.A.3) $\quad S(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq 1$ (et même > 1 !)

l'inégalité $\quad S(\alpha) \leq \dfrac{1}{\alpha-1} + 1$ a été obtenue à la question précédente.

I.B - Première étude asymptotique du reste.

I.B.1) En reprenant l'encadrement de la question I.A.2 mais en commençant la sommation à l'indice n, on obtient

$\forall N \in \mathbb{N}$ $\quad N \geq n+1$

$$\frac{1}{N^\alpha} + \int_n^N \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dx}{x^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\frac{1}{N^\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) + \frac{1}{n^\alpha}$$

Si $\alpha > 1$, on peut faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha}$$

en particulier $\quad R_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1} \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$

I.B.2) $f : x \mapsto \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad f''(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad f'''(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}}$

Pour k dans $\mathbb{N}^*$ écrivons la formule de Taylor en k à l'ordre 2, avec reste intégral.

$$f(k+1) = f(k) + (k+1-k)f'(k) + \frac{(k+1-k)^2}{2} f''(k) + A_k.$$

avec $A_k = \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} f'''(t)\,dt.$

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{t^{\alpha+2}}\,dt$$

Or $\forall t \in [k, k+1]$ $\quad 0 \leq \frac{1}{t^{\alpha+2}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+2}}$, donc

$$0 \leq \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{t^{\alpha+2}}\,dt \leq \frac{1}{k^{\alpha+2}} \int_k^{k+1} (k+1-t)^2\,dt = \frac{1}{k^{\alpha+2}} \underbrace{\left[-\frac{(k+1-t)^3}{3}\right]_k^{k+1}}_{=\frac{1}{3}}$$

On obtient finalement

$$0 \leq A_k \leq \frac{1}{6}\,\frac{\alpha(\alpha+1)}{k^{\alpha+2}}$$

(un petit peu mieux que ce qui est demandé).

I.B.3) On en déduit pour $N \geq n$

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} = \underbrace{\sum_{k=n}^{N} f(k+1) - f(k)}_{\text{Somme télescopique}} + \frac{\alpha}{2}\,\frac{1}{k^{\alpha+1}} - A_k$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ $\quad R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) - \sum_{k=n}^{+\infty} A_k$, avec

$$0 \leq \sum_{k=n}^{+\infty} A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{6} R_n(\alpha+2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{6}\left(\frac{1}{\alpha+1}\,\frac{1}{n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

Finalement $\quad R_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^\alpha} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)}_{= O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)}.$

~~Rq. le résultat aurait pu être obtenu plus rapidement en remarquant que.~~