II. Formule de Taylor et nombres de Bernoulli.

II.A.1) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc g aussi et

$$\forall k \in [1, p] \qquad g^{(k)} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i+k)} = \sum_{i=k}^{p} a_{i-k} f^{(i)} + \sum_{i=p+1}^{p+k-1} a_{i-k} f^{(i)}$$

$$\forall k \in [1, p] \qquad g^{(k)} = \sum_{i=k}^{p-1} a_{i-k} f^{(i)} + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p,k} f^{(l+p)}$$

avec

$b_{l,p,k} = a_{l+p-k}$ si $l \leq k-1$

$b_{l,p,k} = 0$ si $l \geq k$.

En sommant

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} g^{(k)} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=k}^{p} \frac{1}{k!} a_{i-k} f^{(i)} + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p-1} \frac{1}{k!} b_{l,p,k} f^{(l+p)}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} g^{(k)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k!} a_{i-k} \right) f^{(i)} + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)}$$

avec $\qquad b_{l,p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} b_{l,p,k}$.

On aura

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} g^{(k)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

dès que

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k!} a_{i-k} = 0 & 2 \leq i \leq p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{i-1} = -\sum_{k=2}^{i} \frac{1}{k!} a_{i-k} & 2 \leq i \leq p \end{cases}$$

Ces relation permettent bien de définir une suite, par.

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_i = -\sum_{k=2}^{i+1} \frac{1}{k!} a_{i+1-k} & 1 \leq i \leq p-1. \end{cases}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2} \qquad a_2 = -\frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{6} a_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = a_2.$$

II A.2) * On a vu que les relations

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$$

permettaient de définir une suite répondant à la question.

Montrons que ces conditions sont nécessaires. Pour cela choisissons $f : x \mapsto \frac{x^p}{p!}$, alors $f^{(p+\ell)}(x) = 0$ pour $\ell \geq 1$ et le calcul effectué à la question précédente donne.

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} g^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k!} a_{i-k} \right) \frac{x^{p-i}}{(p-i)!}$$

$$\left(f' + \sum_{i=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}\right)(x) = f'(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}$$

L'unicité des coefficients d'une fonction polynomiale montre que $1 = a_0$ $\quad 0 = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k!} a_{i,k}$ $\quad 2 \leq i \leq p$ sont aussi des conditions nécessaires.

* On a $|a_0| = 1 \leq 1$. On suppose $p \geq 1$ et $|a_k| \leq 1$ pour $0 \leq k \leq p-1$ alors $|a_p| \leq \sum_{i=2}^{p+1} \frac{|a_{p+1-i}|}{i!} \leq e - 2 \leq 1$. On a donc prouvé par récurrence $\forall p \in \mathbb{N} \quad |a_p| \leq 1$.

* On a montré, par anticipation, $a_1 = -\frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{12}$.

II.A.3 a) $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |a_p z^p| \leq |z|^p$. Or $\sum_{p \geq 0} |z|^p$ est une série qui converge (vers $\frac{1}{1-|z|}$). Donc $\sum_{p \geq 0} a_p z^p$ converge absolument donc converge.

II A.3 b) Si $|z| < 1$ $\quad e^z - 1 = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} z^p \quad \varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$ et sont les sommes de séries absolument convergentes. On peut donc effectuer leur produit de Cauchy.

$$(e^z - 1)\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{1}{p!} a_q \right) z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{p+1} \frac{1}{i!} a_{p+1-i} \right) z^{p+1} = z.$$

On en déduit

$$\forall z \neq 0 \quad |z|<1 \quad e^{z}-1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \underline{\varphi(z) = \frac{z}{e^{z}-1}}.$$

<u>II A.3 c)</u> $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z|<1 \quad \varphi(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n z^n$, donc

$$\varphi(+z) - \varphi(-z) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}.$$

L'intervalle $]-1,1[$ étant contenu dans $\{z, |z|<1\}$, on peut appliquer le théorème d'unicité du développement en série entière.

On aura donc $\underline{\forall k \geq 1 \quad a_{2k+1} = 0 \quad \text{ssi}}$

$$\underline{\forall x \in]-1,1[\quad \varphi(x) - \varphi(-x) = 2 a_1 x = -x.}$$

Vérifions cela. pour $x \neq 0$, le résultat s'étendra par continuité en 0.

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = \frac{x}{e^{x}-1} + \frac{x}{e^{-x}-1} = \frac{x}{e^{x}-1} + \frac{xe^{x}}{1-e^{x}} = x\,\frac{1-e^{x}}{e^{x}-1} = -x.$$

q. e. d

On a donc $\forall k \geq 1 \quad a_{2k+1} = 0$. donc $a_3 = 0$ et

$$a_4 = -\frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{24}a_1 - \frac{1}{120}a_0 = -\frac{1}{72} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = \frac{-10}{720} + \frac{15}{720} - \frac{6}{720}$$

$$\underline{a_4 = -\frac{1}{720}}.$$

<u>II. B) Formule de Taylor.</u>

<u>II. B. 1)</u> Commençons par remarquer que pour tout ℓ entier il existe une constante c_ℓ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \quad f^{(\ell)}(x) = \frac{c_\ell}{x^{\alpha-1+\ell}}$.

On en déduit que $\forall k \; \forall x \in [k, k+1] \quad \forall \ell \geq 2p+1 \quad |f^{(\ell)}(x)| \leq \frac{|c_\ell|}{k^{2p+\alpha}}$

On en déduit

$$\underline{\left| \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(2p+\ell)}(k) \right| \leq \frac{\sum_{\ell=1}^{2p-1} |b_{\ell,2p}| |c_{2p+\ell}|}{k^{2p+\alpha}} = \frac{B}{k^{2p+\alpha}}.}$$

On écrit ensuite la formule de Taylor à l'ordre $2p$ en k pour g.

$$g(k+1) = g(k) + \sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{i!} g^{(i)}(k) + r_{k,2p}.$$

On utilise la majoration de Taylor-Lagrange de $|r_{k,2p}|$ (On a vu en I.B.2) comment passer de Taylor avec reste intégral à la majoration de Taylor-Lagrange. Nous ne recommencerons donc pas)

$$|r_{k,2p}| \leq \frac{1}{(2p+1)!} \sup_{x\in[k,k+1]} |g^{(2p+1)}(x)|$$

$$\leq \frac{1}{(2p+1)!} \sup_{x\in[k,k+1]} \sum_{i=0}^{2p-1} |a_i| |f^{(2p+1+i)}(x)|$$

$$|r_{k,2p}| \leq \frac{1}{(2p+1)!} \frac{\sum_{i=0}^{2p-1} |a_i| |C_{2p+1+i}|}{k^{\alpha+2p}} = \frac{C}{k^{\alpha+2p}}$$

D'autre part $$\sum_{i=1}^{2p} \frac{1}{i!} g^{(i)}(k) = f'(k) + \underbrace{\sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+k)}(k)}_{r'_{k,2p}}$$

Donc $$g(k+1) - g(k) = f'(k) + \underbrace{r_{k,2p} + r'_{k,2p}}_{R(k)}$$

avec $$|R(k)| \leq \frac{B}{k^{\alpha+2p}} + \frac{C}{k^{\alpha+2p}} = \frac{A}{k^{2p+\alpha}}.$$

II.B.2) On peut donc écrire. $\frac{1}{k^\alpha} = g(k+1) - g(k) - R(k)$

$R(k) = O\left(\frac{1}{k^{+(2p+\alpha)}}\right)$ avec $2p+\alpha > 1$, donc $\sum R(k)$ converge absolument.

De plus $\forall i$ $\lim_{N\to+\infty} f^{(i)}(N) = 0$ donc $\lim_{N\to+\infty} g(N+1) = 0$.

Donc en sommant de n à N puis en faisant tendre N vers $+\infty$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -g(n) + \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} R(k)}_{= \alpha_n}.$$

$$|\alpha_n| \le \sum_{k=n}^{+\infty} |R(k)| \quad \text{(série absolument convergente)}$$

$$\le A \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+2p}}$$

$$|\alpha_n| \le A\, R_{n}(\alpha+2p) \qquad \alpha_n = O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

On en déduit donc.

$$R_n(\alpha) = -\left(a_0 f(n) + \qquad + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\right) - a_{2p-1} f^{(2p-1)}(n) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

$\cancel{\text{où } f^{(2p-1)}(x) = \frac{C_{2p-1}}{n^{\alpha-1}}}$

Or pour $p \geq 2$ $a_{2p-1} = 0$ donc.

$$\forall p \geq 2 \qquad R_n(\alpha) = -\left(a_0 f(n) + \qquad + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\right) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

le résultat est vrai pour $p = 1$ aussi car.

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

II.B.3) On choisit $\alpha = 3$ et $p = 3$

$$R_n(3) = +\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12\, n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right)$$

$$\zeta(3) \simeq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6}$$

sans majoration effective de l'écart.

Pour $n = 1$ le membre de droite vaut $1,167 \pm 10^{-3}$

alors que $S(3) = 1,202 \pm 10^{-3}$

Pour $n = 2$ le membre de droite vaut $1,2028 \pm 10^{-4}$

alors que $S(3) = 1,2020 \pm 10^{-4}$.