III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III. A) Polynômes de Bernoulli

III. A. 1) Propriétés élémentaires

a) On montre par récurrence sur A_n est défini de manière unique.
(on identifie polynômes et fonctions polynomiales)

- A_0 est défini de manière unique
- On suppose A_n défini de manière unique.

La condition $A'_{n+1} = A_n$ équivaut à l'existence de k_{n+1} dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A_{n+1}(x) = \int_0^x A_n(t)\,dt + k_{n+1}$$

la condition $\int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0$ devient

$$0 = \left(\int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)\,dt\right) dx\right) + k_{n+1} \qquad \left(\text{car } \int_0^1 k_{n+1}\,dx = k_{n+1}\right)$$

Elle détermine k_{n+1} et donc A_{n+1} de manière unique.

Remarque : $A_{n+1} = A'_{n+2}$ donc $\int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0$ équivaut à $A_{n+2}(0) = A_{n+2}(1)$
Soit $A_n(0) = A_n(1)$ pour $n \geq 2$.

La suite est parfois présentée ainsi

$$A_0 = 1 \quad \forall n \geq 1\ A'_{n} = A_{n-1} \text{ et } \forall n \geq 2 \quad A_n(0) = A_n(1).$$

La récurrence est un peu plus délicate car il faut faire intervenir artificiellement $\int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0$.

On suppose A_n construit alors $A_{n+1}(x) = \int_0^x A_n(t)\,dt + k_{n+1}$.

$$A_{n+2}(x) = \int_0^x \int_0^t A_n(s)\,ds\,dt + k_{n+1}x + k_{n+2}.$$

Or $n+2 \geq 2$ donc $A_{n+2}(0) = A_{n+2}(1)$ donne $k_{n+1} = -\int_0^1 \left(\int_0^t A_n(s)\,ds\right) dt$

et détermine A_{n+1} de manière unique.

On vérifie alors que la suite ainsi construite vérifie les hypothèses.

L'analyse nous a montré que.

$A_0 = 1$ $\qquad B_0 = 1$

$$A_{n+1}(x) = \int_0^x A_n(t)\,dt - \int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)\,dt\right) dx.$$

On en déduit.

$$A_1(x) = x - \int_0^1 x\,dx = x - \frac{1}{2}$$

$$A_1 = X - \frac{1}{2} \qquad B_1 = X - \frac{1}{2}$$

$$A_2(x) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right) dt - \int_0^1 \int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) dx.$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$

$$A_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$$

$$A_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$$

$$A_3(x) = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{12}\right) dt - \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{12}\right) dt\right) dx$$

$$A_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} - \int_0^1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}\right) dx$$

$$A_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} - \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right]$$

$$A_3(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}$$

$$A_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} \qquad B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{X}{2}.$$

III.A.1.b) Posons $\tilde{A}_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$. Alors $\tilde{A}_n(t) = (-1)^n A_n(1-t) = \tilde{A}_n(t)$

~~$\forall n$~~ $\tilde{A}_0 = 0$, $\forall n$ $\tilde{A}_{n+1}'(t) = (-1)^{n+2} A_{n+1}'(1-t) = (-1)^n A_n(1-t) = \tilde{A}_n(t)$

$$\int_0^1 \tilde{A}_{n+1}(t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 A_{n+1}(1-t)\,dt = (-1)^n \int_0^1 A_n(u)\,du = 0 \quad (\text{chgt} : t \to 1-u)$$

$(\tilde{A}_n)_{n \geq 0}$ vérifie les mêmes hypothèses que $(A_n)_{n \geq 0}$. Par unicité $\forall n \in \mathbb{N}$ $\tilde{A}_n = A_n$.

III. A. 1. c) + On a vu dans la remarque sur III. A. 1 a) que $A_n(0) = A_n(1)$ pour $n \geq 2$. On rappelle que cela résulte de $A_{n+2}(1) - A_{n+2}(0) = \int_0^1 A'_{n+2}(t)dt = \int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0$.

+ Pour $n \geq 2$ on a aussi $A_{2n-1}(0) = (-1) A_{2n-1}(1)$.

donc $A_{2n-1}(0) = -A_{2n-1}(0)$ (car $2n-1 \geq 2$) et finalement

$A_{2n-1}(0) = A_{2n-1}(1) = 0$.

III. A. 1. d) * On $A_{n+1}(x) = \int_0^x A_n(t)\,dt + A_{n+1}(0)$.

$A_0 = c_0 = 1 = A(0)$

Si $A_n(x) = c_0 \frac{x^n}{n!} + \quad + c_n$.

alors $A_{n+1}(x) = \int_0^x \left(c_0 \frac{t^n}{n!} + c_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \quad + c_n\right) dt + c_{n+1}$

$A_{n+1}(x) = c_0 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + c_1 \frac{x^n}{n!} + \dots \quad + c_n x + c_{n+1}$.

le résultat est donc établi par récurrence.

* De plus si $n \geq 1$ $\int_0^1 A_n(x)dx = \int_0^1 A_{(n-1)+1}(x)\,dx = 0$

Donc, aussi, puisque $A_{n+1}(1) = A_{n+1}(0)$ si $n \geq 1$

$\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdot \quad \frac{c_{n-1}}{2} + c_n + c_{n+1} = c_{n+1}$

soit. $\frac{c_0}{(n+1)!} + \quad + \frac{c_{n-1}}{2} + c_n = 0$

III. A. 1. e) D'après ce qu'on vient de voir.

$c_0 = 1$

et $\forall n \geq 1 \quad c_n = -\frac{c_0}{(n+1)!} \quad - \frac{c_{n-1}}{2!} = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-i}}{i!}$

la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence qui définit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = c_n$.

III. A.2) Fonctions génératrices.

III. A.2.a) On sait que $\forall n \quad |a_n| \leq 1$, donc.

$\forall t \quad |A_n(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{|t|^k}{k!} = e^{|t|}$

$\forall t \in [-1,1] \quad |A_n(t)| \leq e$

Or $\sum_{n\geq 0} e|z|^n$ converge si $|z|<1$ donc.

$\forall z \in \mathbb{C}\ |z|<1 \quad \forall t \in [-1,1] \quad \sum_{n\geq 0} A_n(t) z^n$ converge absolument

donc converge.

On peut ~~même~~ remarquer que puisque $\forall z \in \mathbb{C}\ |z|<1$ ~~[-1,1]~~ $\forall t \in [0,1]\ |A_n(t) z^n| \leq e|z|^n$

La série de fonction $\sum_{n\geq 0} u_{n,z}$, avec $u_{n,z}(t) = A_n(t) z^n$.

converge normalement sur $[0,1]$, donc uniformément.

Chaque $u_{n,z}$ est continue sur $[0,1]$, donc.

pour tout z, $|z|<1$, $t \mapsto f(t,z)$ est continue sur $[0,1]$

III. A.2 b)

Fixons z dans $\mathbb{C}$, avec $|z|<1$, alors.

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n,z} : t \mapsto A_n(t) z^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

  $u'_{0,z} = 0 \qquad u'_{n,z}(t) = A'_n(t) z^n = A_{n-1}(t) z^n = z\, u_{n-1,z}$ si $n \geq 1$.

- $\sum_{n\geq 0} u_{n,z}$ converge simplement sur $[0,1]$.

- $\sum_{n\geq 0} u'_{n,z}$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$, car $\|u'_{n,z}\|_\infty = |z|\,\|u_{n,z}\|_\infty \leq e|z|^n$ et $\sum_{n\geq 1} e|z|^n$ converge

Donc $f_z : t \mapsto f(t,z)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'_z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_{n,z}(t)$

$f'_z(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z\, u_{n-1,z}(t) = z\, f_z(t)$.

L'équation précédente se résout facilement

$$f_z(t) = f_z(0)\,e^{zt}.$$

Or $A_n(1) = A_n(0)$ pour $n \geq 2$ et $n = 0$

$A_1(1) = \frac{1}{2} = 1 + A_1(0)$

Donc $f_z(1) = f_z(0) + z$ et finalement

$f_z(0) + z = f_z(0)\,e^{z}$ donc ~~pour~~

pour $z \neq 0$ $f_z(0) = \dfrac{z}{e^{z}-1}$ et finalement

$$\forall t \in [0,1]\quad \forall z \in \mathbb{C}\ 0<|z|<1 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)\,z^n = \frac{z\,e^{tz}}{e^{z}-1}.$$

III.A.2.c) Soit z dans $\mathbb{C}$ avec $0<|z|<2\pi$ (l'énoncé oublie $z\neq 0$)

On a en particulier $z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$ donc $e^{z} \neq 1$.

$$\frac{z\,e^{z/2}}{e^{z}-1} + \frac{z}{e^{z}-1} = z\,\frac{e^{z/2}+1}{(e^{z/2}-1)(e^{z/2}+1)} = \frac{z}{e^{z/2}-1} = 2\,\frac{z/2}{e^{z/2}-1}$$

ce qui se traduit par

$$f\left(\tfrac{1}{2}, z\right) + f(0,z) = 2\,f\left(0, \tfrac{z}{2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\left(\tfrac{1}{2}\right) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(0)\,z^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} A_n(0)\,z^n.$$

ceci est vrai en particulier pour tout z de $]-1,1[-\{0\}$, puis de $]-1,1[$.

en prolongeant par continuité).

On peut appliquer le théorème sur l'unicité du développement en série entière.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n\left(\tfrac{1}{2}\right) + A_n(0) = \frac{1}{2^{n-1}} A_n(0)$$

Or $A_n(0) = a_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n$$

III. A. 3) Variations des polynômes de Bernoulli

III. A. 3. a) On suppose que si n est de la forme $4k+2$. (1.) est vrai. Céci est le cas pour $k=0$ car $A_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$ et possède donc le tableau de variation désiré :

$A_2(0) = A_2(1) = \frac{1}{12} > 0 > A_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{24}$, et puisque $A_2'(x) = x - \frac{1}{2}$.

A_2 est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Cette initialisation étant faite revenons au cas $n = 4k+2$.

$A_n(0) > 0$ $A_n(\frac{1}{2}) < 0$ et A_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc A_n s'annule une seule fois sur $[0, \frac{1}{2}]$ en un α_n de $]0, \frac{1}{2}[$. De même il existe un unique β_n de $]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $A_n(\beta_n) = 0$.

$A'_{n+1} = A_n$ est donc strictement négative sur $]\alpha_n, \beta_n[$, strictement positive sur $]\beta_n, 1[$ et $]0, \alpha_n[$.

A_{n+1} est donc strictement croissante sur $[0, \alpha_n]$
strictement décroissante sur $[\alpha_n, \beta_n]$
strictement croissante sur $[\beta_n, 1]$.

$A_{n+1}(0) = A_{n+1}(1) = 0$ et $A_{n+1}(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) a_{n+1} = 0$ car $n+1$ est impair.

Donc A_{n+1} s'annule en 0, $\frac{1}{2}$ et 1, est strictement positif sur $]0, \frac{1}{2}[$ strictement négatif sur $]\frac{1}{2}, 1[$. On retrouve bien le cas (4.).

$A'_{n+2} = A_{n+1}$, donc A_{n+2} est strictement croissant sur $[0, \frac{1}{2}]$ strictement décroissant sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Si $A_{n+2}(0) \geq 0$ alors $\forall x \in]0, 1[$ $A_{n+2}(x) > 0$ donc $\int_0^1 A_{n+2}(t)\,dt > 0$ contradictoire

donc $A_{n+2}(0) = A_{n+2}(1) < 0$.

Le même argument montre que $A_{n+2}(\frac{1}{2}) > 0$. (Sinon $\int_0^1 A_{n+2}(t)\,dt < 0$).

Pour A_{n+2} on est bien dans le cas (2.)

On passe du schéma (2.) pour $n+2$ au schéma (3.) pour $n+3$ par un raisonnement similaire à celui qui nous a permis de passer de (1.) à (4.). On passe finalement au schéma (1.) pour $n+4$ comme on est passé de (4.) à (2.)

On retrouve donc à $n+4 = 4(k+1)+2$ la même situation qu'à $n = 4k+2$. Ce qui nous permet donc d'étendre l'ensemble de ces résultat par récurrence à tous les entiers $n \geq 2$.

III. A. 3-b) Il résulte des variations des A_n établies à la question précédente que.

Si p est pair $p = 2n$. alors $\|A_p\|_\infty = \max\left(|A_p(0)|, |A_p(\tfrac{1}{2})|, |A_p(1)|\right)$

Or $|A_p(1)| = |A_p(0)| = |a_p|$ et $|A_p(\tfrac{1}{2})| = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)|a_p| \leq |a_p|$

Donc $\forall n \geq 1 \quad \forall x \in [0,1] \quad |A_{2n}(x)| \leq |a_{2n}|$

Si p est ~~pair~~ impair $p = 2n+1$.

Alors $\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}] \quad A_p(x) = \int_0^x A_{p-1}(t)\,dt + \underbrace{A_p(0)}_{=0}$

donc $|A_p(x)| \leq x \sup\limits_{t \in [0,x]} |A_{p-1}(t)| \leq \frac{1}{2}|a_{p-1}| = \frac{|a_{2n}|}{2}$

Si $x \in [\tfrac{1}{2}, 1]$ $\quad A_p(x) = (-1)^p A_p(1-x) = -A_p(1-x)$ et $(1-x) \in [0, \tfrac{1}{2}]$

donc $|A_p(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$.

$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in [0,1] \quad |A_{2n+1}(x)| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}.$

On remarquera que ces résultats restent valables pour $n = 0$ car $A_0 = 1$ $\quad A_1(x) = x - \frac{1}{2} \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$ et $|a_0| = 1$.

III. B Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III. B. 1. a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, en particulier de classe $\mathcal{C}^1$, donc

$$f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(t)\,dt=\int_0^1 A_0(t)\,f'(t)\,dt.$$

(c'est en fait la formule pour $q=0$).

f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, ainsi que tous les A_i, on peut intégrer par parties et on pourra continuer à le faire.

$$\int_0^1 A_0(t)\,f'(t)\,dt=\left[A_1(t)\,f^{(1)}(t)\right]_0^1-\int_0^1 A_1(t)\,f^{(2)}(t)\,dt$$

c'est la formule pour $q=1$.

On passe ensuite du rang q au rang $q+1$ en remarquant

$A_q=A'_{q+1}$ et

$$\int_0^1 A_q(t)\,f^{(q+1)}(t)=\left[A_{q+1}(t)\,f^{(q+1)}(t)\right]-\int_0^1 A_{q+1}(t)\,f^{(q+2)}(t)\,dt$$

(ainsi que $(-1)^q=(-1)^{(q+1)+1}$!)

III. B. 1. b) On choisit $q=2p+1$.

$A_1(0)=-\frac{1}{2}$ $\quad A_1(1)=\frac{1}{2}$ $\quad A_{2j+1}(0)=A_{2j+1}(1)$ pour $j\geq 1$

et $A_{2j}(0)=A_{2j}(1)=a_{2j}$ pour $j\geq 1$.

On obtient donc bien.

$$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}\left(f'(0)+f'(1)\right)-\sum_{j=1}^{p}a_{2j}\left(f^{(2j)}(1)-f^{(2j)}(0)\right)-\int_0^1 A_{2p+1}(t)\,f^{(2p+2)}(t)\,dt.$$

III B. 2) En appliquant cette égalité à $f_k: t\mapsto f(k+t)$, on a, puisque $f_k^{(j)}(t)=f^{(j)}(k+t)$

$$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{2}f'(k)+\frac{1}{2}f'(k+1)-\sum_{j=1}^{p}a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1)-f^{(2j)}(k)\right)-\int_0^1 A_{2p+1}(t)\,f^{(2p+2)}(k+t)\,dt$$

$$\int_0^1 A_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(k+t)\,dt = \int_k^{k+1} A_{2p+1}(t-k)\, f^{(2p+1)}(t)\,dt$$

$$\int_0^1 A_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(k+t)\,dt = \int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(t)\, f^{(2p+1)}(t)\,dt$$

Finalement en écrivant $\underline{\frac{1}{2}f'(k)+\frac{1}{2}f'(k+1) = f'(k)+\frac{f'(k+1)-f'(k)}{2}}$

On obtient

$$\underline{f'(k) = f(k+1)-f(k) - \frac{f'(k+1)-f'(k)}{2} + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\right)}$$

$$\underline{+\int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(t)\,dt} \qquad (*)$$

Commencons par remarquer de $\int_n^{+\infty} A^*_{2p}(t)\, f^{(2p+2)}(t)\,dt$ converge.

En effet $|A^*_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(t)| \leq |a_{2p}|\, |f^{2p+2}(t)|$

Or $f^{(2p+2)}$ est de signe constant donc

$$|A^*_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(t)| \leq \varepsilon\, |a_{2p}|\, f^{2p+2}(t)$$

et $\int_n^{x} f^{(2p+2)}(t)\,dt = f^{(2p+1)}(x) - f^{(2p+1)}(n)$ tend vers $-f^{(2p+1)}(n)$.

Donc. $t \mapsto \varepsilon\, |a_{2p}|\, f^{2p+2}(t)$ est intégrable et

$$\int_n^{+\infty} |f^{(2p+2)}(t)|\,dt = \varepsilon \int_n^{+\infty} f^{2p+2}(t)\,dt = |f^{2p+1}(n)|$$

On a donc prouvé d'une part que $\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(t)\,dt$ a un sens, d'autre part $\underline{\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}\, f^{(2p+1)}(t)\,dt\right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2}\, |f^{(2p+1)}(n)|}$

On choisit $N \geq n$, on somme $(*)$ pour k variant de n à N.

en utilisant des sommes télescopiques

$$\sum_{k=n}^{N} f'(k) = f(N+1) - f(n) - \frac{f'(N+1)-f'(n)}{2} + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\right)$$
$$+ \int_n^N A^*_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

On a vu que l'intégrale possédait une limite lorsque N tend vers $+\infty$, de plus f et toutes ses dérivées tendent vers 0 en $+\infty$, donc le membre de droite possède une limite lorsque N tend vers $+\infty$, donc le membre de gauche aussi et

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = \underbrace{-f(n) + \frac{f'(n)}{2} - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n)}_{= -\left(\sum_{i=0}^{2p} a_i f^{(i)}(n)\right)} + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

Avec $\left| \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(t)\, dt \right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} \left| f^{(2p+1)}(n) \right|$

III.B.3) En choisissant $p-1$ au lieu de p dans la question précédente on obtient le résultat de II.B.2). Le terme en $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ du II.B.2) peut donc s'écrire

$$\int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)\, f^{(2p)}(t)\, dt$$

Remarque : la majoration $\left| \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)\, f^{(2p)}(t)\, dt \right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2} \left| f^{(2p-1)}(n) \right|$ ne donne qu'un $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-2}}\right)$. Pour obtenir le $O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$, il faut intégrer encore une fois par parties et écrire

$$\int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)\, f^{(2p)}(t)\, dt = \int_n^{+\infty} A^*_{2p}(t)\, f^{(2p+1)}(t)\, dt.$$