IV) Compléments sur l'erreur.

IV A.1)

$$\int_0^1 A_r(t)g(t)\,dt = \int_0^{1/2} A_r(t).g(t) + \int_{\frac{1}{2}}^1 A_n(t)g(t)\,dt$$

$$\int_0^1 A_r(t)g(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} A_r(t)g(t) + \int_0^{\frac{1}{2}} A_r(1-t)g(1-t)\,dt$$

Si n est impair. $A_r(1-t) = -A_n(t)$, donc

$$\int_0^1 A_r(t)g(t)\,dt = \int_0^{1/2} A_r(t)\underbrace{(g(t)-g(1-t))}_{\leq 0 \text{ car } g \text{ est croissante}}\,dt$$

Si $n \equiv 1 \mod 4$ $\quad A_r(t) \leq 0$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ donc

$$\int_0^1 A_r(t)g(t)\,dt \geqslant 0$$

Si $n \equiv 3 \mod 4$ $\quad \int_0^1 A_r(t)g(t)\,dt \leq 0$ pour des raisons similaires

IV A.2) $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ $\forall j \in \mathbb{N}^*$ $f^{(j)}(x) = \dfrac{(-1)^{j-1}\,\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+j-2)}{x^{\alpha+j-1}}$.

avec la convention $\alpha(\alpha+1)\ \ (\alpha+j-2) = 1$ si $j=1$

On a vu en III.B.3) que

$$S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha) = \underbrace{\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t).f^{(2p+2)}(t)\,dt}_{= \sum_{k=n}^{+\infty} \int_0^1 A_{2p+1}(t)\, f^{(2p+2)}(t)\,dt} = \hat{R}_{n,2p}$$

Or $f^{(2p+3)} \geqslant 0$ donc $f^{(2p+2)}$ est croissante.

En remplaçant p par $2p$ et $2p+1$ et en utilisant le résultat de la question précédente on obtient $\hat{R}_{4p} \geqslant 0$ $\hat{R}_{4p+2} \leq 0$ c'est-à-dire :

$$\tilde{S}_{n,4p} \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p+2}\ , \text{ puis}$$

$$\tilde{S}_{n,4p} \leq S(\alpha) \leq \tilde{S}_{n,4p-2}$$ en remplaçant p par $p-1$ à droite.

Rq). On peut remplacer p par $p-1$ à droite car $p \geq 1$ donne toujours $4p-2 \geq 2$.

Soit p dans $\mathbb{N}^*$ $p \geq 1$.

Si $p = 2q$

$$0 \leq S(\alpha) - \tilde{S}_{n,\cancel{2p}}(\alpha) = S_n - \tilde{S}_{n,4q} \leq \tilde{S}_{n,4q+2} - \tilde{S}_{n,4q}$$

$$0 \leq S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha) \leq -a_{4q+2}\, f^{(4q+2)}(x)$$

$$|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)| \leq |a_{2p+2}|\, |f^{2p+2}(x)|$$

Si $p = 2q+1$

$$0 \geq S(\alpha) - \tilde{S}_{4q+2}(\alpha) \geq \tilde{S}_{n,4q+4}(\alpha) - \tilde{S}_{n,4q+2}(\alpha)$$

(d'après la deuxième inégalité appliquée à $p = q+1$).

$$|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)| \leq |a_{4q+4}|\, |f^{(4q+4)}(x)|$$

$$\underline{|S(\alpha) - \tilde{S}_{n,2p}(\alpha)| \leq |a_{2p+2}|\, |f^{(2p+2)}(x)|}$$

IV.A.3) $f(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$, $n = 100$, $p = 2$

$$\underline{|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)| \leq |a_6| \times f^{(6)}(x)}$$

$f'(x) = \frac{1}{x^3}$ $f''(x) = -\frac{3}{x^4}$ $f'''(x) = \frac{3\times 4}{x^5}$ ... $f^{(6)}(x) = \frac{3\times4\times5\times6\times7}{x^8}$

$$|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)| \leq \frac{1}{42}\,\frac{1}{2\times3\times4\times5\times6} \times \frac{3\times4\times5\times6\times7}{10^{16}}$$

$$\leq \frac{1}{12\times 10^{16}}$$

$$\underline{|S(3) - \tilde{S}_{100,4}(3)| \leq 10^{-17}}$$

IV.B Séries de Fourier

le théorème utilisé en IV.B.3) n'est plus au programme. Mais il peut faire l'objet d'une redémonstration à partir du programme (Concours-Commun Mines-Ponts 2016 par exemple).

IV.B.1) $\tilde{A}_p$ est 2π-périodique car $x \mapsto \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right]$ est 2π-périodique.

Elle est continue par morceaux car $\tilde{A}_{p\,|\,]0,2\pi[}$ est polynomiale donc continue, et de plus $\lim_{x\to 0^+} \tilde{A}_p(x)$ et $\lim_{x\to 2\pi^-} \tilde{A}_p(x)$ existent.

On peut même remarquer que pour $p \geq 2$ $\lim_{x\to 0^+} \tilde{A}_p(x) = \lim_{x\to 2\pi^-} \tilde{A}_p(x)$, donc $\tilde{A}_p$ est continue.

De plus puisque $\tilde{A}_{p\,|\,[0,2\pi]}$ est polynomiale on obtient :

Pour $p \geq 2$ $\tilde{A}_p$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

IV.B.2) Pour $p=0$
$$\hat{A}_0(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n\neq 0 \end{cases}$$

Pour $p \geq 1$
$$\hat{A}_p(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{A}_p(t)\,dt = \int_0^1 A_p(t)\,dt = 0$$

pour $n \neq 0$
$$\hat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{A}_p(t) e^{-int}\,dt$$
$$\hat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(t) e^{-2i\pi n t}\,dt$$
$$\hat{A}_p(n) = \left[A_p(t) \times \left(-\frac{1}{2i\pi n}\right) e^{-2i\pi n t}\right]_0^1 + \frac{1}{2i\pi n}\int_0^1 A_p'(t) e^{-2i\pi n t}\,dt$$

Si $p=1$
$$\hat{A}_p(n) = \left[\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2i\pi n}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2i\pi n}\right)\right] + \underbrace{\frac{1}{2i\pi n}\int_0^1 e^{-2i\pi n t}\,dt}_{=0}$$

$$\hat{A}_1(n) = \frac{-1}{2i\pi n}$$

Rq : Ce qu'on note $\hat{A}_1$ est en fait $x \mapsto x - \frac{1}{2}$ sur $[0,1]$.

Si $p \geq 2$. $A_p(0) = A_p(1)$ et $A'_p(t) = A_{p-1}(t)$

donc. $$\hat{A}_p(n) = \frac{1}{2i\pi n} \hat{A}_{p-1}(n).$$

Pour compléter.

$$\begin{cases} \hat{A}_0(0) = 1 & \hat{A}_0(n) = 0 \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}^* \\ \hat{A}_p(0) = 0 & \text{si } p \geq 1. \\ \hat{A}_p(n) = \dfrac{-1}{(2i\pi n)^p} & \text{si } p \geq 1 \text{ et } n \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

IV.B.3) $\tilde{A}_p$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux pour $p \geq 2$, donc sa série de Fourier converge uniformément et en particulier simplement vers $\tilde{A}_p$. On a donc.

$$\forall p \geq 2. \forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{A}_p(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{A}_p(k) e^{2i\pi k x}.$$

IV.B.4) On a en particulier pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$\tilde{A}_{2p}(0) = A_{2p}(0) = a_{2p} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \frac{-1}{(2\pi i n)^{2p}}$$

$$= 2 \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{(2\pi)^{2p}} \times \frac{1}{n^{2p}}$$

$$a_{2p} = (-1)^{p+1} \frac{S(2p)}{2^{2p-1} \pi^{2p}}$$

IV.C) Comportement de l'erreur.

IV.C.1) Cette relation découle directement de l'expression de a_{2p} donnée en IV.B.4) et de l'expression de $f^{(j)}(x)$ donnée et IV.A.2).

$$\left| \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} \frac{f^{(2p+2)}(x)}{f^{(2p)}(x)} \right| = \frac{S(2p+2)}{2^{2p+1}\,\pi^{2p+2}} \; \frac{2^{2p-1}\,\pi^{2p}}{S(2p)} \; \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+2p)}{x^{\alpha+2p+1}} \; \frac{x^{\alpha+2p-1}}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+2p-2)}.$$

$$\left| \frac{a_{2p+2}}{a_{2p}} \frac{f^{(2p+2)}(x)}{f^{(2p)}(x)} \right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)\,S(2p+2)}{4\,x^2\,\pi^2\,S(2p)} = \rho_{p,x}.$$

IV.C.2 L'encadrement $1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$ montre que $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{S(2p+2)}{S(2p)} = 1$.

On en déduit $\lim\limits_{p\to+\infty} \rho_{p,x} = +\infty$.

A x fixé il ne sert à rien de rajouter des termes dans le développement asymptotique.

La technique consiste à s'arrêter lorsque $\rho_{p,x} \geq 1$ ce qui donne pour $|a_{2p}\, f^{(2p)}(x)|$ la meilleure valeur de la majoration de l'erreur.

Pour ce qui est de choisir x et p pour obtenir une précision ε donnée il n'y a pas de règle générale. Tout dépend de la difficulté de calculer les $f^{(j)}(x)$.