Troisième partie : minoration de l'exposant de Hölder ponctuel

12) $2^{-n_0-1} < |x-x_0| \le 2^{-n_0}$, $x \neq x_0$, équivaut à

$$-n_0 - 1 < \log_2 |x-x_0| \le -n_0$$

$$n_0 \le -\log_2 |x-x_0| < n_0 + 1$$

Cet unique entier est donc $E(\log_2 |x-x_0|)$.

13) Si $k \notin \{\tilde{k}_j(x), \tilde{k}_{j_0}(x_0)\}$ $\theta_{jk}(x) = 0 = \theta_{j,k}(x_0)$.

Donc, quitte à compter deux fois le même indice (si $\tilde{k}_j(x) = \tilde{k}_j(x_0)$)

on aura

$$W_j \le |c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)|\,|\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x_0)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}|\,|\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x) - \theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(x_0)|$$

$$W_j \le (|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| + |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)|)\, 2^{j+1} |x-x_0| \quad \text{(d'après 5.d)}$$

14a) On suppose $j \le n_0$, d'après B_1.

$$|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)| \le C_1 (2^{-j} + |\tilde{k}_{j}(x_0) 2^{-j} - x_0|)^s \le C_1 (2^{-j} + 2^{-j})^s$$ d'après la définition de $\tilde{k}_j(x_0)$

De même

$$|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \le C_1 (2^{-j} + |\tilde{k}_j(x) 2^{-j} - x| + |x-x_0|)^s$$

or $|\tilde{k}_j(x) 2^{-j} - x| \le 2^{-j}$ et $|x-x_0| \le 2^{-n_0} \le 2^{-j}$

donc $|c_{j,\tilde{k}_j(x)}(f)| \le C_1 (3 \times 2^{-j})^s$

finalement $W_j \le (C_1 (2 \times 2^{-j})^s + C_1 (3 \times 2^{-j})^s)\, 2^{+j} \times 2 |x-x_0|$

$$W_j \le 2 C_1 (3 \times 2^{-j})^s \times 2^j \times 2 |x-x_0| = 4 C_1 2^{(1-s)j} 3^s |x-x_0|$$

14b) $A = \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in J_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| = \sum_{j=0}^{n_0} W_j$

$$A \le 4 C_1 3^s \left(\sum_{j=0}^{n_0} (2^{1-s})^j \right) |x-x_0| \le 4 C_1 3^s \frac{2^{(1-s)(n_0+1)}}{2^{1-s} - 1} |x-x_0|$$

$$A \le C_2\, 2^{-n_0(1-s)} |x-x_0| \le C_2 |x-x_0|^{s-1} |x-x_0| = C_2 |x-x_0|^s$$

q. e. d.

15) L'inégalité $|c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}| \leq c_1 2^{s(1-j)}$ a été prouvée à la question précédente.

$$W'_j = \sum_{k \in J_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| = |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)|\,|\theta_{j,\tilde{k}_j(x_0)}|$$

$$\leq |c_{j,\tilde{k}_j(x_0)}(f)|$$

$$\underline{W'_j \leq c_1 2^{s(1-j)}}$$

Puis

$$\sum_{j=n_0+1}^{+\infty} W'_j \leq c_1 \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} 2^{s(1-j)}$$

$$\leq c_1 2^{s} \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} (2^{-s})^{j}$$

$$\leq \frac{c_1 2^{s} (2^{-s})^{n_0+1}}{1-2^{-s}}$$

$$\leq c_3 \, 2^{-s(n_0+1)}$$

$$\leq c_3 \left(2^{-(n_0+1)}\right)^{s}$$

$$\underline{\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in J_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \leq c_3 |x-x_0|^{s}}$$

q.e.d.

16) La suite $(\omega_f(2^{-n}))_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0

il suffit de prendre $n_1 = \min\{n,\ \omega_f(2^{-n}) \geq 2^{-n_0 s}\}$.

Il faut néanmoins remarquer que puisque $f(0)=0$ et ~~f(1)~~ $\|f\|_\infty = 1$

on a $\omega_f(1) \geq 1 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)-f(0)|$, donc, puisque de plus

$2^{-n_0 s} \leq 1$, $\underline{\{n,\ \omega_f(2^{-n}) \geq 2^{-n_0 s}\} \text{ est non vide}}$.

17) Soit x dans $[0,1]$ et $n \geq n_1$.

Soit $\underline{\ell = \tilde{k}_{n+1}(x)}$

Alors $\underline{x \in [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]}$

Soit x dans $[0,1[$ et $\ell = \tilde{k}_{n+1}(x)$, $x \in [\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}[$

$$f(x) - S_n(x) = f(x) - f(\ell 2^{-n-1}) + \underbrace{f(\ell 2^{-n-1}) - S_n(\ell 2^{-n-1})}_{=0} + S_n(\ell 2^{-n-1}) - S_n(x)$$

D'autre par S_n est affine sur $[\ell 2^{-n-1}, (\ell+1)2^{-n-1}]$, donc

$$|S_n(\ell 2^{-n-1}) - S_n(x)| \le |S_n(\ell 2^{-n-1}) - S_n((\ell+1)2^{-n-1})| = |f(\ell 2^{-n-1}) - f((\ell+1)2^{-n-1}$$

$$|S_n(\ell 2^{-n-1}) - S_n(x)| \le \omega_f(2^{-n-1})$$

De même puisque $|x - \ell 2^{-n-1}| \le 2^{-n-1}$ $\quad |f(x) - f(\ell 2^{-n-1})| \le \omega_f(2^{-n-1})$

Finalement $|f(x) - S_n(x)| \le 2\omega_f(2^{-n-1}) \le 2\omega_f(2^{-n_1-1}) \le 2 \times 2^{-n_0 s} = 2^{s+1}(2^{-(n_0+1)})^s \le 2^{s+1}|x-x_0|^s$

car $n \geq n_1$ et ω_f est croissante

$$|f(x) - S_n(x)| \le 2^{s+1}|x-x_0|^s$$

18a)
$$\sum_{k\in J_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x)| = |c_{j,\tilde{k}_j(x)}|\,|\theta_{j,\tilde{k}_j(x)}(x)| \le |c_{j,\tilde{k}_j(x)}|$$

Or on a déjà établi $|c_{j,\tilde{k}_j(x)}| \le C_1(3\times 2^{-j})^s$.

Si de plus $j \in [n_0+1, n_1]$ $\quad C_1(3\times 2^{-j})^s \le C_1(3\times 2^{-(n_0+1)})^s \le C_1 3^s |x-x_0|^s$.

En sommant, on obtient immédiatement

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k\in J_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x)| \le C_1 3^s (n_1-n_0)|x-x_0|^s$$

18b) On a donc $\omega_f(2^{-n_1}) \le C_4(N)(1+n_1)^{-N}$

c'est-à-dire $\quad (1+n_1) \le \left(\dfrac{C_4(N)}{\omega_f(2^{-n_1})}\right)^{\frac{1}{N}}$

Puis $\quad n_1 - n_0 \le (1+n_1) \le (C_4(N))^{\frac{1}{N}}\left(\dfrac{1}{2^{-n_0 s}}\right)^{\frac{1}{N}} \le C_4(N)^{\frac{1}{N}} \dfrac{1}{(|x-x_0|^{\frac{1}{N}})^s}$

et finalement

$$\sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k=J_j} |c_{j,k}(f)||\theta_{j,k}(x)| \le \underbrace{C_1 3^s (C_4(N))^{\frac{1}{N}}}_{=C_5(N)} |x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}.$$

19) * Supposons $n_1 \leq n_0$. Dans le résultat de la question 17 on choisit $n = n_0$. On a donc $|f(x) - S_{n_0}f(x)| \leq 2^{s+1}|x-x_0|^s$ et

$|f(x_0) - S_{n_0}f(x_0)| \leq 2^{s+1}|x-x_0|^s$.

Donc $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - (S_{n_0}f)(x) + S_{n_0}f(x) - S_{n_0}f(x_0) + f(x_0)|$

$$\leq 2 \times 2^{s+1}|x-x_0|^s + |(S_{n_0}f)(x) - (S_{n_0}f)(x_0)|$$

L'inégalité triangulaire, accompagnée du résultat de 14 b) donne.

$$|(S_n(f))(x) - (S_n f)(x_0)| \leq C_2 \, |x-x_0|^s.$$

Donc $\underline{|f(x) - f(x_0)| \leq (2^{s+2} + C_2)|x-x_0|^s \leq (2^{s+2} + C_2)|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}}$ pour tout entier $N \geq 1$ car $|x-x_0| \in [0,1]$.

* Supposons $n_1 > n_0$, dans le résultat de la question 17 on choisit $n = 1$.

On commence comme dans le cas précédent

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2^{s+2}|x-x_0|^s + |(S_{n_1}f)(x) - (S_{n_1}f)x_0|.$$

On écrit ensuite, en utilisant l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned}|(S_{n_1}f)(x) - (S_{n_1}f)(x_0)| \leq & \sum_{j=0}^{n_0} \sum_{k \in J_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x) - \theta_{j,k}(x_0)| \quad \} A \\ & + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in J_j} |c_{j,k}(f)|\,|\theta_{j,k}(x_0)| \quad \} B \\ & + \sum_{j=n_0+1}^{n_1} \sum_{k \in J_j} |c_{j,k}|\,|\theta_{j,k}(x)| \quad \} C\end{aligned}$$

$A \leq C_2 |x-x_0|^s \leq C_2 |x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}$ pour tout entier $N \geq 1$ d'après 14 b

$B \leq C_3 |x-x_0|^s \leq C_3 |x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}$ d'après 15

$C \leq C_5(N) |x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}$ d'après 18 b).

$$\underline{|(S_{n_1}f)(x) - (S_{n_1}f)(x_0)| \leq (\underbrace{C_2 + C_3 + C_5(N)}_{\geq C_2})|x-x_0|^{(1-\frac{1}{N})s}}.$$

En synthétisant ces deux cas, et en choisissant $C_6(N) = 2^{s+2} + C_2 + C_3 + C_5(N)$ 16

on a donc

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \exists C_6(N) \quad \forall x \in [0,1] - \{x_0\} \qquad |f(x) - f(x_0)| \leq C_6(N)\,|x - x_0|^{\left(1 - \frac{1}{N}\right)s}$$

On en déduit :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \alpha_f(x_0) \geq \left(1 - \frac{1}{N}\right)s.$$

et finalement $\alpha_f(x_0) \geq s$ en faisant tendre N vers $+\infty$.