Concours Mines Ponts MP 2016 Mathématiques II

Théorème taubérien de Hardy-Littlewood-Karamata.

Partie A
Une intégrale à paramètre

1) φ est continue sur I, positive.

+ Sur $[1,+\infty[$ $\quad 0 \leq \varphi(u) \leq e^{-u}$ et $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ $\left(\int_1^{+\infty} e^{-u} du = [-e^{-u}]_1^{+\infty} = e^{-1} \right)$.

Donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

+ Sur $]0,1]$ $\quad 0 \leq \varphi(u) \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0,1]$ $\left(\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} du = [2\sqrt{u}]_0^1 = 2 \right)$.

Donc φ est intégrable sur I.

2) Notons $f(x,u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$.

+ Si $x > 0$ $\quad f(x,\cdot)$ est continue, positive sur I et $\forall u \in I \quad 0 \leq f(x,u) \leq \frac{1}{x}\varphi(u)$, donc $f(x,\cdot)$ est intégrable et $F(x)$ est défini.

+ Si $x = 0$ $\quad f(0,u) \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$ avec $3/2 \geqslant 1$ donc $f(0,u)$ n'est pas intégrable, donc $F(0)$ n'est pas défini.

+ Si $x < 0$ $\quad f(x,u) \underset{-x}{\sim} \frac{e^{x}}{\sqrt{-x}} \frac{1}{(u-(-x))^1}$, donc $f(x,\cdot)$ n'est pas intégrable sur $]-x,+\infty[$ (et comme elle est positive sur cet intervalle cela équivaut à la divergence de l'intégrale impropre $\int_{-x}^{+\infty} f(x,u)du$.) donc $F(x)$ n'est pas défini.

En conclusion F est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ $(= I)$

3) + On a vu que $\forall x \in I$ $f(x,\cdot)$ est intégrable

+ $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $I \times I$ avec $\forall (x,u) \in I^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = -\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)^2}$

+ $\forall x \in I$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue (par morceaux)

+ $\forall u \in I$ $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, u)$ est continue.

+ $\forall a > 0$ $\forall x \in [a,+\infty[$ $\forall u \in I$ $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) \right| \leq \frac{1}{a^2}\,\varphi(u) = \theta_a(u)$

et θ_a est intégrable sur I

Il résulte de tout ceci que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et

$$\forall x \in I \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}\,(u+x)^2}\,du$$

4) $\forall x \in I$ $F'(x) = \left[\left(\frac{1}{u+x} - \frac{1}{x} \right) \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u+x} - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2} \frac{e^{-u}}{u^{3/2}} \right) du$

$\forall x \in I$ $F'(x) = \left[-\frac{\sqrt{u}\,e^{-u}}{(u+x)x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\,du}{\sqrt{u}\,(u+x)} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du - \frac{1}{2x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}\,(x+u)}\,du$

(Toutes les intégrales existent d'après le travail précédemment effectué).

$\forall x \in I.$ $F'(x) = 0 + F(x) - \frac{1}{x} K - \frac{1}{2x} F(x)$

$\forall x \in I$ $x\,F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) F(x) = -K.$

5) G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$\forall x \in I$ $G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} F(x) - \sqrt{x}\,e^{-x} F(x) + \sqrt{x}\,e^{-x} F'(x)$

$G'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(x F'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) F(x) \right) = -\frac{K e^{-x}}{\sqrt{x}}.$

Donc $G(x) = C - K \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ (car $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue et intégrable sur I donc $x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ en est une primitive.

6) Effectuons le changement de variable $u = xt$ dans l'expression de $F(x)$.

$$\underline{G(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x}\sqrt{t}\, x(1+t)}\, x\, dt = \underline{e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt}$$

+ $\forall t \in I \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{1+t}$

+ $\forall x \in I \quad t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}$ est continue

+ $\forall (x,t) \in I^2 \left| \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} = \alpha(t)$ et

α est continue (par morceaux) et intégrable sur I car

$\alpha(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \qquad \alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}} \qquad (\frac{1}{2} < 1$ et $\frac{3}{2} \geq 1$ + Riemann)

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée étendue.

et $\lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} \underset{t = v^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2v\, dv}{v(1+v^2)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dv}{1+v^2} = \pi$.

et $\underline{\lim_{x \to 0} G(x) = \pi}$.

De plus

$\forall x \in I \qquad 0 \leq \underline{G(x)} \leq \sqrt{x}\, e^{-x} \times \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \underline{\frac{K e^{-x}}{\sqrt{x}}}$

donc $\qquad \underline{\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0}$

D'autre part $\quad \underline{\lim_{x \to +\infty} G(x) = C - K^2}$

et $\qquad C = G(0) = \pi$.

En conclusion $\qquad \underline{K = \sqrt{\pi}}$

Partie B

Etude de deux séries de fonctions

7) Définissons u_n et v_n ($n \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$) sur I par.

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \qquad v_n(x) = \sqrt{n}\, e^{-nx}.$$

- $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n est continue.
- $\forall a > 0$ $\forall x \in [a, +\infty[$ $|u_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{\sqrt{n}} = \alpha_n = (e^{-a})^n/\sqrt{n}$
- $\sum\limits_{n \geqslant 0} \alpha_n$ converge car $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. ~~Donc~~

Donc f est définie et continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et par conséquent sur I.

La démonstration est la même pour g. $\left(\sqrt{n}\, e^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

8) $\forall x \in I$ $\quad u \mapsto \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ est décroissante sur I (comme produit de deux fonctions positives décroissantes)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_n^{n+1} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}\, du \leq \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\, du$$

La fonction $u \mapsto \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$ (comme en 1, on peut aussi dire que l'intégrale est de même nature que la série car la fonction est décroissante) et $\sum u_n(x)$ converge. Donc en sommant de 1 à N et en faisant tendre N vers $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\, du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}\, du.$$

En effectuant le changement de variable $u = \frac{v}{x}$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\,dv \leq f(x) \leq \frac{K}{\sqrt{x}}$$

(*) car $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}}\,dv$

Donc $\lim\limits_{x\mapsto 0} \sqrt{x}\, f(x) = K$ (*) et $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}$

9) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$

donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} \left(\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ est convergente.

Donc la suite $\left(\int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right)_{n\geqslant 1}$ converge et si ℓ est sa limite, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right)$ converge vers $1 - \ell - 2 = -(\ell+1)$

(car $\int_1^{\sqrt{n}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n} - 2$). En particulier cette suite est bornée.

10) Pour tout $x > 0$ la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est absolument convergente, il en est de même de $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-nx}$ (qui converge vers $\frac{1}{1-e^{-x}}$)

leur produit de Cauchy converge donc vers $f(x) \times \frac{1}{1-e^{-x}}$ et par conséquent

$$\forall x > 0\ h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} \times e^{(n-k)x} \right) = \frac{f(x)}{1-e^{-x}}.$$

11) Il en résulte $h(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

D'après la question 9 il existe M tel que $\forall n \left| \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right| \leq M$.

Donc $\forall x > 0$ $\quad \left| h(x) - 2g(x) \right| \leq M \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{M e^{-x}}{1-e^{-x}} \underset{0}{\sim} \frac{M}{x}.$

On a donc $\quad g(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{h(x)}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{h(x)}{2} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

et par conséquent $\quad g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$

Partie C

Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers.

12) + Si A est fini $I_A = \mathbb{R}^+$ $(\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \ a_n e^{-nx} = 0)$

+ Si A est infini, construisons φ strictement croissante par.

$\varphi(0) = \min\{n \in \mathbb{N} \ \ a_n = 1\}$ (existe car cet ensemble est non vide) puis:

$\forall n \geq 0 \qquad \varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N}, \ k > \varphi(n) \ \ a_k = 1\}$ (ensemble non vide car A est infini donc $A - [0, \varphi(n)] \neq \emptyset$).

Alors φ est strictement croissante et $\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_{\varphi(n)} = 1$.

On en déduit que $(a_n)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers 0 (remarque du rédacteur. Il me semble qu'on aurait dû autoriser les étudiants à énoncer ce résultat sans preuve), par conséquent la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge donc $I_A \subset \mathbb{R}^{*+}$.

Réciproquement $\forall x \in \mathbb{R}^{*+} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ 0 \leq a_n e^{-nx} \leq e^{-nx}$ et $\sum_{n \geq 0} e^{-nx}$ converge donc $\sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx}$ converge et $x \in I_A$.

En conclusion. si A est infini $I_A = \mathbb{R}^{*+}$.

13) Il suffit de faire un produit de Cauchy.

$\forall x > 0 \quad \sum_{n \geq 0} a_n e^{-nx}$ et $\sum_{n \geq 0} 1 \cdot e^{-nx}$ sont absolument convergentes. On peut effectuer leur produit de Cauchy.

$$\forall x > 0 \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx} e^{-(n-k)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n)) e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}.$$

14) $A_1 = \{ k^2 ; k \in \mathbb{N}^* \} = A$ $\quad A(n) = \{ k ; k \in \mathbb{N}^* \ k \leq \sqrt{n} \}$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{Card}(A(n)) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et on a bien.

$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}.$$

$\forall y \in \mathbb{R} \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$

$\forall y \in \mathbb{R} \quad 0 \leq y - \lfloor y \rfloor \leq 1$

$\forall x > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq (\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor) e^{-nx} \leq e^{-nx}.$

En sommant

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}.$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx} = g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ et $\displaystyle\frac{1}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

Donc.
$$\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$$

$$f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

et par conséquent $\quad \Phi(A_1) = \lim\limits_{x\to 0} x f_{A_1}(x) = 0$

(et $A_1 \in S$)

15). En effectuant le produit de Cauchy : $\forall x > 0 \ (f_{A_1}(x))^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p+q=n} a_p a_q\Big) e^{-nx}.$

Or $\displaystyle\sum_{p+q=n} a_p a_q = \sum_{\substack{p+q=n \\ p=l^2 \ q=s^2}} a_p a_q = \sum_{n=l^2+s^2} 1 = v(n)$. ~~Donc $(f_{A_1}(x))^2 = f_{A_2}(x)$~~

Donc $\quad (f_{A_1}(x))^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx}.$

Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ avec $b_n = 1$ si $n = p^2 + q^2$ $p,q > 0$ $\quad b_n = 0$ sinon.

Or a $f_{A_2}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Or $\forall n \ b_n \leq v(n)$ donc $f_{A_2}(x) \leq (f_{A_1}(x))^2$

On en déduit immédiatement $\quad \Phi(A_2) \leq \lim\limits_{x\to 0} x (f_{A_1}(x))^2 = \dfrac{\pi}{4}.$

Partie D
Un théorème taubérien

16) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad |\alpha_n e^{-nx} \varphi(e^{-nx})| \leq \alpha_n e^{-inx} \|\varphi\|_\infty$

Or $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-inx}$ converge donc $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-nx} \varphi(e^{-nx})$ converge absolument donc converge.

Donc $L(\varphi)$ est bien définie. On remarquera que L est une application de E vers $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R})$ et non de E vers F $L(\varphi)(0)$ n'est pas définie. (par exemple si $\alpha_n = 1$ pour tout n et $\varphi = 1$. (on remarquera qu'on a bien $\lim_{x\to 0} x \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = 1$))

La linéarité de L résulte de la linéarité de la fonction donnant la somme d'une série convergente.

Il est clair que si $\varphi \geq 0$ alors $L(\varphi) \geq 0$.

Donc $\varphi_2 \geq \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 \geq 0 \Rightarrow L(\varphi_2 - \varphi_1) \geq 0 \Rightarrow L(\varphi_2) \geq L(\varphi_1)$

17) E_1 est un sous-espace vectoriel par linéarité du passage à la limite et Δ est linéaire.

Or a vu en 16 $\forall x \neq 0 \quad |x L(\varphi)(x)| \leq \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\right) \|\varphi\|_\infty$

Donc, par passage à la limite : $|\Delta(\varphi)| \leq \ell \|\varphi\|_\infty$

Ceci dit bien que Δ est une application linéaire continue de $(E_1, \| \|_\infty)$ vers $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire une ~~forme linéaire~~)

18) $(L(e_p))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}$

$x (L(e_p))(x) = \frac{1}{p+1} \left((p+1) x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-(n)(p+1)x}\right)$

Donc $\Delta(e_p) = \frac{\ell}{p+1}$ et en particulier $e_p \in E_1$.

D'après le théorème de Weierstrass appliqué à $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = E_0$ tout élément φ de E_0 est limite uniforme d'une $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E_0.

Or si $\psi_n = \sum_{p=0}^{d_n} c_p e_p$ on a.

$$\Delta(\psi_n) = \sum_{p=0}^{d_n} c_p \frac{\ell}{p+1} = \ell \int_0^1 \psi_n(t)\,dt.$$

Puisque $(\psi_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers ψ on a $\underline{\lim_{n\to+\infty} \Delta(\psi_n) = \ell \int_0^1 \psi(t)\,dt.}$

Il faut encore néanmoins prouver que ψ est dans E_1.
Pour cela on remarque que puisque $\lim_{x\to 0^+} x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} = \ell$ existe
il existe M tel que $\forall x \in]0,\frac{1}{2}]$ $|x\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}| \leq M$.

On en déduit

$$\forall x \in]0,\tfrac{1}{2}] \quad |x L(\psi)(x) - x L(\psi_n)(x)| \leq M \|\psi - \psi_n\|_\infty.$$

On en déduit.

$\begin{cases} + \ (x \mapsto x L(\psi_n)(x))_{n\geq 0} \text{ converge uniformément vers } x\mapsto xL(\psi)(x) \text{ sur }]0,\tfrac{1}{2}] \\ + \ \forall n \ \lim_{x\to 0^+} x L(\psi_n)(x) = \Delta(\psi_n) \text{ existe}. \end{cases}$

<u>On en déduit</u>

+ $\lim_{x\to 0^+} x L(\psi)(x)$ existe donc ψ est dans E_1.

<u>+ de plus</u> $\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0^+} x L(\psi)(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 0^+} x L(\psi_n)(x)$

(*) $\Delta(\psi) = \lim_{n\to+\infty} \Delta(\psi_n)$.

$$\underline{\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\,dt}$$

La ligne (*) résulte de la continuité de Δ, mais uniquement lorsqu'on sait que ψ est dans E_1, c'est toute la difficulté de la question.

19) $\lim\limits_{x \to (a-\varepsilon)^+} \dfrac{a-x}{\varepsilon} = 1 = g_-(a-\varepsilon)$

$\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{a-x}{\varepsilon} = 0 = g_-(a)$

Donc g_- est continue sur $[0,1]$

La démonstration est la même pour g_+.

On vérifie facilement

$$\underline{g_- \leq 1_{[0,a]} \leq g_+}$$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[$

$$\underline{L(g_-) \leq L(1_{[0,a]}) \leq L(g_+)}$$

$\underline{\Delta(g_-) = a - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = a - \frac{\varepsilon}{2}}$ $\qquad$ $\underline{\Delta(g_+) = a + \frac{\varepsilon}{2}}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_- > 0 \quad \forall x \in]0, \eta_-] \quad x L(g_-)(x) \geq \Delta(g_-) - \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_- > 0 \quad \forall x \in]0, \eta_-] \quad x L(g_-)(x) \geq a - \varepsilon$

De même

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_+ > 0 \quad \forall x \in]0, \eta_+] \quad x L(g_+)(x) \leq a + \varepsilon$.

En choisissant $\eta = \min(\eta_+, \eta_-)$

$$\underline{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]0, \eta] \quad a - \varepsilon \leq x L(1_{[0,a]})(x) \leq a + \varepsilon}$$

Ceci veut exactement dire que $1_{[0,a]}$ est dans E_1 avec $\underline{\Delta(1_{[0,a]}) = a\ell}$. On remarquera qu'on aussi

$g_- \leq 1_{[0,a[} \leq g_+$. On a donc $1_{[0,a[}$ dans E_1 avec $\Delta(1_{[0,a[}) = a\ell$.

Par soustraction on en déduit $\Delta(\{a\}) = 0$ et pour $a < b$. $\Delta(1_{]a,b[}) = \Delta(1_{[0,b[} - 1_{[0,a]}) = (b-a)\ell$

Puis par linéarité $\underline{\text{toute fonction } \psi \text{ en escalier est dans } E_1 \text{ avec } \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\, dt}$.

~~Comme en 18, puisque que toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers, on en déduit $E = E_1$ et $\forall \psi \in E$ $\Delta(\psi) = \int_0$~~

Comme en 18, puisque toute fonction ψ ~~...~~ continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers, on montre ~~...~~ que ψ est dans E_1 avec $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\,dt$.

Puisque que de plus $E_1 \subset E$ on a finalement

$$E = E_1 \quad \text{et} \quad \forall \psi \in E \quad \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\,dt.$$

20) $L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-\frac{n}{N}} \psi\left(e^{-\frac{n}{N}}\right) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-\frac{n}{N}} \frac{1}{e^{-\frac{n}{N}}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n.$

Puisque ψ est dans E on a.

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} L(\psi)\left(\frac{1}{N}\right) = \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)\,dt$$

$$= \ell \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{dt}{t} = \ell \left[\ln t\right]_{1/e}^{1}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n = \ell.$$

21) Si $A \in S$ $\lim x f_A(x) = \Phi(A)$ et $\frac{1}{n} \mathrm{Card}(A(n)) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k$

donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \mathrm{Card}(A(n)) = \Phi(A)$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \lim_{x\to 0} x\left(f_{A_1}(x)\right)^2 = \frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma(k) = \frac{\pi}{4}.$$