Fonctions à décroissance rapide et transformation de Fourier

Notations

Si f est une fonction de classe suffisante sur $\mathbb{R}$ et p un entier, on note $f^{(p)}$ sa dérivée d'ordre p. Dans le problème $\mathcal{E}$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, et $\mathcal{S}$ le sous-ensemble des fonctions de $\mathcal{E}$ telles que pour tout k et p entiers, $x \mapsto (1+|x|)^k f^{(p)}(x)$ est bornée, on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes bornées sur $\mathbb{R}$. Si f est bornée sur $\mathbb{R}$ on note $\|f\|_\infty$ le nombre $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. On admet qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{B}$.

On note T l'application $t \mapsto t$ définie sur $\mathbb{R}$, et pour a réel e_a l'application $t \mapsto e^{iat}$.

Première partie : propriétés de $\mathcal{S}$

I.1 Montrer qu'une fonction f de $\mathcal{E}$ est dans $\mathcal{S}$, si et seulement si pour tout couple d'entiers (p,k) on a $\lim_{x\to\pm\infty} |x|^k f^{(p)}(x) = 0$.

I.2 Etablir que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

I.3 Prouver que $f_0 : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est dans $\mathcal{S}$.

I.4 Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication.

I.5 Si P est une fonction polynomiale, j un entier et f un élément de $\mathcal{S}$ établir que $t \mapsto P(t)\, f^{(j)}(t)$ est dans $\mathcal{S}$.

I.6 Si f est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et a un réel on note $\tau_a(f)$ l'application $t \mapsto f(t-a)$. Montrer que si f est dans $\mathcal{S}$ il en est de même de $\tau_a(f)$.

I.7 Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{S}$. On suppose que pour tout couple (k,p) d'entiers la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} t \mapsto t^k f_n^{(p)}(t)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de $\mathcal{S}$.

Deuxième partie : transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$

Dans la suite du problème f désigne toujours un élément de $\mathcal{S}$. Définissons $\hat{f}$ pour x réel par $\hat{f}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t)\, dt$.

II.1 Montrer que f est intégrable. On note $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt$. On ametta qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{S}$.

II.2.a Montrer que $\hat{f}$ est bien définie, continue et bornée

II.2.b Montrer que $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ est linéaire, continue de $(\mathcal{S}, \|\ \|_1)$ vers $(\mathcal{B}, \|\ \|_\infty)$. Calculer sa norme subordonnée à ces deux normes, c'est à dire le nombre $\displaystyle\sup_{f\neq 0} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_\infty}{\|f\|_1}$.

II.2.c Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer sa dérivée à l'aide de $\mathcal{F}(Tf)$.

II.3 En utilisant la question précédente, obtenir une équation différentielle vérifiée par $\mathcal{F}(f_0)$, en déduire $\mathcal{F}(f_0)$ (f_0 a été définie en $I.2$).

II.4.a Calculer $\mathcal{F}(\tau_a(f))$.

II.4.b Calculer $\mathcal{F}(f')$ puis $\mathcal{F}(f^{(k)})$.

II.4.c En déduire $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} |x|^k \mathcal{F}(f^{(p)})(x)$ pour tout couple (k,p) dans $\mathbb{N}^2$.

II.4.d Montrer que pour tout élément f de $\mathcal{S}$ $\mathcal{F}(f)$ est aussi dans $\mathcal{S}$.

Troisième partie : transformée de Fourier réciproque

On définit $\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x)$. On a donc $\overline{\mathcal{F}}(f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t)\, dt$.

III.1 Calculer $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f_0))$.

III.2 Montrer que $g : x \mapsto \int_0^1 f'(xt)\, dt$ est un élément de $\mathcal{E}$.

III.3 En déduire que si f est dans $\mathcal{S}$ et vérifie $f(0) = 0$ alors il existe g dans $\mathcal{S}$ telle que $f(x) = xg(x)$ pour tout x réel.

III.4 En déduire que si $f(0) = 0$ alors $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(0) = 0$.

III.5 En considérant $f - f(0)f_0$, prouver $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(0) = f(0)$, pour tout f de $\mathcal{S}$.

III.6 A l'aide de II.4.a, montrer $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$ pour tout f de $\mathcal{S}$.

Quelques exercices d'algèbre générale posés a l'X

Exercice 1: Trouver les entiers naturels n tels que $n^n - 3$ soit divisible par 7.

Exercice 2: Soit u_0 et u_1 dans $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ et pour tout k $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$. Etudier la périodicité de la suite (u_k).

Exercice 3: Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 4:

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments du groupe symétrique soient conjugués [1].

2) Soit σ et σ' deux éléments de S_n, P_σ et $P_{\sigma'}$ les matrices de permutation associées (dans $M_n(\mathbb{C})$). Montrer que σ et σ' sont conjugués si et seulement si P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

Exercice 5: Soit (p, q) dans $\mathbb{C}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les racines du polynôme $X^3 + pX + q$. Trouver un polynôme P de $\mathbb{C}_3[X]$ unitaire, dont les racines sont $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$, $\lambda_2^2 + \lambda_3^2$ et $\lambda_1^2 + \lambda_3^2$.

Exercice 6: Soit P dans $\mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples, de degré $n \geq 2$. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (n-1)P'(x)^2 - nP(x)P''(x) \geq 0.$$

Exercice 7: Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Existe-t-il Q tel que $Q^3 \equiv X \ [P]$?

Exercice 8:

1) Soit n un entier naturel non nul et pair. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $X^n - 1$ divise $P^2 - X$.

2) On suppose désormais n impair. Donner le nombre de polynômes P de $R_{n-1}[X]$ tels que $X^n - 1$ divise $P^2 - X$.

Exercice 9: Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que s'il existe R de $\mathbb{R}[X]$ tel que P divise $R^3 - Q$, alors il existe S de $\mathbb{R}[X]$ tel que P^2 divise $S^3 - Q$.

Exercice 10: Soit $(p_1, \dots, p_n)$ des réels positifs non tous nuls.

1) Montrer que $P = X^n - p_1X^{n-1} - \cdots - p_n$ admet une unique racine dans $\mathbb{R}*+$.

2) Soit $(a_1, \dots, a_n)$ des complexes non tous nuls, z_0 une racine de $X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ et e la racine strictement positive de $P = X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_n|$. Montrer que $|z_0| \leq e$.

3) Soit $(b_1, \dots, b_n)$ des réels strictement positifs dont la somme est 1. Montrer que $|z_0| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left|\frac{a_i}{b_i}\right|^{\frac{1}{i}}$.

Exercice 11: Soit P dans $\mathbb{Q}[X]$, irréductible. Montrer que les racines complexes de Q sont simples.

Exercice 12: Soit M une matrice de $M_{2n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, les autres étant dans $\{-1, 1\}$. Montrer que M est inversible.

Exercice 13: Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$. Soit U un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, commutant à Δ. Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout P de $\mathbb{R}[X]$: $U(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Delta^n(P)$

Exercice 14: Soit n un entier non nul et P dans $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer le déterminant de la matrice $(P(i+j-1))_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 15: Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des réels. Calculer le déterminant $(\cos((j-1)\alpha_i)_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 16: Soit A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que pour $k \in \{0, \dots, 2n\}$ $A + kB$ appartient à $GL_n(\mathbb{Z})$. Calculer $\det A$ et $\det B$.

1. Deux éléments g et g' d'un groupe G sont conjugués, s'il existe h dans G tel que $g' = hgh^{-1}$.