
Problème 1: quelques théorèmes d'arithmétique

On démontre dans la partie A un théorème de Lagrange dont on utilise le résultat pour démontrer le théorème de Wilson (partie B) et le théorème de Wolstenholme (partie C).

Partie A : théorème de Lagrange

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

2. Montrer que pour tout entier premier p et tout entier $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.
3. Soit p un entier premier impair. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \prod_{k=1}^{p-1} (x+k)$$

- 3.1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$pf(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x)$$

- 3.2. Justifier l'existence d'un p -uplet d'entiers $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1})$ tel que pour tout réel x on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-1-k}$$

- 3.3. Montrer que $a_0 = 1$ et $a_{p-1} = (p-1)!$

- 3.4. À l'aide de la question 3.1 et en faisant intervenir le binôme de Newton, montrer que pour tout entier $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ on a :

$$pa_k = \sum_{i=0}^k \binom{p-i}{k+1-i} a_i$$

- 3.5. En déduire que $a_1 = \binom{p}{2}$ et que pour tout entier $k \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$ on a :

$$ka_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$$

- 3.6. En déduire le théorème de Lagrange :

« Si p est un entier premier impair et si $f(x) = \prod_{k=1}^{p-1} (x+k) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{p-1-k}$ alors les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$ sont divisibles par p ». On pourra raisonner par récurrence.

Partie B : théorème de Wilson

On se propose de démontrer la propriété suivante, connue sous le nom de « théorème de Wilson » : si p est un entier premier alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

1. Vérifier que la propriété est vraie pour $p = 2$.
2. p est maintenant un entier premier impair.
- 2.1. Montrer que :

$$p! = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!$$

(les entiers $(a_i)_{i \in [1, p-2]}$ sont ceux définis à la question A.3.2)

- 2.2. En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
3. Montrer que la réciproque du théorème de Wilson est vraie.
4. On se propose d'étudier ce que devient le théorème de Wilson pour les entiers non premiers strictement supérieurs à 4.
 - 4.1. On suppose que $n > 4$ et que la décomposition en produit de facteurs premiers de n comprend au moins deux facteurs premiers distincts. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.
 - 4.2. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^\alpha$ où p est un entier premier et α est un entier strictement supérieur à 2. Montrer que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.
 - 4.3. On suppose que $n > 4$ et que $n = p^2$ où p est un entier premier. Montrer que $1 < 2p < n$ et en déduire que $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$.

Partie C : théorème de Wolstenholme

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le rationnel :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On désigne par s_n et t_n les deux entiers naturels tels que :

en Python

$$H_n = \frac{s_n}{t_n} \quad \text{et} \quad \text{pgcd}(s_n, t_n) = 1$$

1. Écrire un algorithme permettant d'obtenir pour n allant de 2 à 10 les entiers s_n et t_n (on supposera qu'on dispose d'une instruction $\text{pgcd}(a, b)$ qui renvoie le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b). *programmer ensuite cette fonction pgcd.*
2. Calculer s_4, s_6 (et s_{10}) et vérifier que ces entiers sont divisibles respectivement par $5^2, 7^2$ (et 11^2)

Dans la suite, p désigne un nombre premier strictement supérieur à 3. On se propose de démontrer que l'entier s_{p-1} est divisible par p^2 (théorème de Wolstenholme).

3. Montrer que $H_{p-1} = \frac{a_{p-2}}{(p-1)!}$ où a_{p-2} est défini comme à la partie A. *On pourra utiliser une relation liant les racines d'un polynôme et l'un de ses coefficients.*
4. Déduire de l'écriture de $f(-p)$ que :

$$a_{p-2} = p^{p-2} - a_1 p^{p-3} + \dots + a_{p-3} p$$

5. Conclure.

Problème 2 : nombres irrationnels

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

On rappelle que tout nombre rationnel non nul peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Un nombre réel est dit irrationnel s'il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Dans ce problème, on se propose de démontrer l'irrationalité de quelques nombres réels.

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel.
2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
3. Démontrer que le nombre $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
4. On rappelle que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que le nombre e est un nombre irrationnel.

Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q , entiers naturels non nuls, tels que $e = \frac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

- 4.1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que :

$$u_q < e < v_q$$

- 4.2. Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q! \times q$.

Partie B : une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b , entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \frac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction.

Étant donné un entier naturel non nul n et un réel x , on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \quad \text{et} \quad P_0(x) = 1$$

Étant donné un entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx$$

1.

- 1.1. Pour un entier naturel n non nul, exprimer la dérivée de P_n en fonction de P_{n-1} .
- 1.2. Calculer $\sup_{x \in [0, \pi]} |P_n(x)|$ en fonction de a , b et n .
- 1.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$$

1.4. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n > 0$$

1.5. Après avoir justifié que la suite de terme général $\frac{\pi}{n!} \left(\frac{a^2}{4b} \right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

2. Pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k de P_n est notée $P_n^{(k)}$. Par définition, $P_n^{(0)} = P_n$. En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs :

2.1. $0 \leq k \leq n-1$

2.2. $n \leq k \leq 2n$

2.3. $k \geq 2n+1$

Pour le cas 2.2, on pourra utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$.

3.

3.1. Démontrer que pour tout entier naturel n , I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

3.2. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \frac{a}{b}$.

Partie C : développement en série de Engel et applications

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geq 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_0 \dots a_k}$$

est convergente de limite inférieure ou égale à $\frac{1}{a_0 - 1}$.

Si x désigne la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on dit que x admet un développement en série de Engel. On notera $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$.

2. Soit $x \in]0, 1]$. On définit deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 1 + E\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad \text{et} \quad x_{n+1} = a_n x_n - 1 \quad \text{où } E \text{ désigne la fonction partie entière.}$$

2.1. Démontrer que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies.

2.2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2.3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $a_0 \geq 2$.

2.4. En reprenant les notations de la question 1, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$$

En déduire que x admet un développement en série de Engel.

3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes croissantes d'entiers $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geq 2$, $b_0 \geq 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_0, \dots, a_n, \dots] = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$

On pose $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$

3.1. Démontrer que $[a_{n_0}, \dots, a_n, \dots] = [b_{n_0}, \dots, b_n, \dots]$.

3.2. Démontrer que si $x = [a_0, \dots, a_n, \dots]$ alors $a_0 x - 1 \leq x$ et en déduire que $a_0 = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right)$.

- 3.3. En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle $]0, 1]$.
4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :
- 4.1. une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constante égale à c ($c \geq 2$).
 - 4.2. la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = n + 2$.
 - 4.3. la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = (2n + 1)(2n + 2)$.
5. Déterminer le développement en série de Engel du nombre $\text{ch}(\sqrt{2}) - 2$.
6. Démontrer que $x \in]0, 1]$ est rationnel si et seulement si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est stationnaire. Pour le sens direct, on pourra commencer par procéder à la division euclidienne du dénominateur de x par son numérateur.

Rappel

$$\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Problème 2 : statistiques et probabilités

Partie A : deux indicateurs de dispersion

En 1801, un astronome italien, Piazzi découvre une nouvelle planète Cérés, qu'il perd bientôt de vue. Le problème posé alors aux scientifiques est le suivant : comment, à partir d'une série de résultats d'observations effectuées par différents astronomes, choisir une valeur qui se rapproche le plus possible de la "vraie position" et prédire ainsi le futur passage de Cérés. Deux options s'affrontent : celle de Laplace, qui propose de minimiser les valeurs absolues des écarts et celle de Gauss et Legendre, qui proposent de minimiser les carrés des écarts.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $(x_1, \dots, x_n)$, un n -uplet de réels. On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions G et L par :

$$G(x) = \sum_{i=1}^n (x - x_i)^2$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^n |x - x_i|$$

1. Minimisation de G

- 1.1. En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.
- 1.2. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 1.1 ?

2. Minimisation de L

On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est-à-dire que :

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

- 2.1. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
 $n = 3, x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4$
- 2.2. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où :
 $n = 4, x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 7$
- 2.3. Démontrer que la fonction L admet un minimum m sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.
On distinguera les cas n pair et n impair.
- 2.4. Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de x trouvées à la question 2.3 ?