MP*2-2017/2018 DS1.

Problème 1.

(CAPES 2013 Première composition Problème 2)

Partie A. : théorème de Lagrange.

A.1) $k\binom{n}{k} = \dfrac{k.\,n!}{(n-k)!\,k!} = \dfrac{n\,(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}$ car $n \geq 1$ et $k \geq 1$

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$$

A.2) Si p est premier, alors $p \geq 2 \geq 1$ et pour tout k de $[1, p-1]$

$$p\binom{p-1}{k-1} = k\binom{p}{k}.$$

Donc p divise $k\binom{p}{k}$

or p est premier et ne divise pas k car $0<k<p$ donc

p est premier avec k.

Par le théorème de Gauss on peut affirmer p divise $\binom{p}{k}$.

A.3.1) $f(x) = \prod_{k=1}^{p-1}(x+k)$

$$(x+1)f(x+1) - xf(x) = (x+1)\prod_{k=1}^{p-1}(x+1+k) - x\prod_{k=1}^{p-1}(x+k)$$

$$= (x+1)\prod_{k=2}^{p}(x+k) - x\prod_{k=1}^{p-1}(x+k)$$

$$= \prod_{k=1}^{p}(x+k) - x\prod_{k=1}^{p-1}(x+k)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{p-1}(x+k)\right)(x+p-x)$$

$$\underline{(x+1)f(x+1) - x f(x) = p f(x)}$$

A.3.2) Soit $g_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(x+k)$. $\quad g_1(x) = \cancel{x+1} = \sum_{k=0}^{0} a_{1,k}\, x^0$

avec $a_{1,0} = 1$. On suppose

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}\, x^k.$$

②

$$g_{n+1}(x) = (x+n)\, g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k}\, x^k \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} a_{n+1,0} = n\, a_{n,0} \\ a_{n+1,k} = n\, a_{n,k} + a_{n,k-1} \\ a_{n+1,n} = a_{n,n-1} \ (=1 \text{ par récurrence}) \end{cases}$$

Donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\underline{g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k}\, x^k}$ où $\underline{a_{n,k} \in \mathbb{N} \text{ (et même } \mathbb{N}^*)}$.

Or a $f(x) = g_p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_{p,k}\, x^k = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, x^{p-1-k}$ avec.

$\forall k \in [0, p-1]$ $a_k = a_{p,p-1-k}$.

A.3.2. – De $a_{1,0} = 1$ et $a_{n+1,n} = a_{n,n-1}$ on tire

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_{n,n-1} = 1$. Donc $\underline{a_0 = 1}$.

– De $a_{n+1,0} = n\, a_{n,0}$ on tire $\forall n$ $a_{n,0} = (n-1)!$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\underline{a_{n,1} = (n-1)!}$ (en particulier $a_p = (p-1)!$)

A.3.3 $\quad p f(x) = (x+1) \sum_{k=0}^{p-1} a_k (x+1)^{p-1-k} - \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, x^{p-1-k+1}$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} a_k (x+1)^{p-1-k+1} - \sum_{k=0}^{p-1} a_k\, x^{p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} a_k \left((x+1)^{p-k} - x^{p-k} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=0}^{p-k-1} a_k \binom{p-k}{i} x^i$$

$$p f(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \left(\sum_{k=0}^{p-i-1} a_k \binom{p-k}{i} \right) x^i = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k \binom{p-k}{p-1-j} \right) x^{p-1-j}$$

Par identification des coefficients

$$p\, a_j = \sum_{k=0}^{j} a_k \binom{p-k}{p-1-j}$$

$$p\, a_j = \sum_{k=0}^{j} a_k \binom{p-k}{j+1-k}$$ et en changeant les lettres

$$\boxed{p\, a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \binom{p-i}{k+1-i}} \quad 0 \leq k \leq p-1.$$

A.3.5) - $p\, a_1 = a_0 \binom{p}{2} + a_1 \binom{p-1}{1} = \binom{p}{2} + (p-1)\, a_1$

Par conséquent $\boxed{a_1 = \binom{p}{2}}$.

- pour $k \in [2, p-1]$
$$p\, a_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i + \underbrace{\binom{p-k}{1}}_{= p-k} a_k$$

donc $$\boxed{k\, a_k = \binom{p}{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i}.$$

A.3.6). p étant premier impair p divise $a_1 = \binom{p}{2}$ (question 2)

Supposons que p divise a_i pour $1 \leq i \leq k-1$ avec $k \leq p-2$. Alors p divise $\sum_{i=1}^{k-1} \binom{p-i}{k+1-i} a_i$ et p divise $\binom{p}{k+1}$ car $1 \leq k+1 \leq p-1$.

Donc p divise $k\, a_k$. Or $p \wedge k = 1$ même raisonnement qu'en A.2) donc $p \mid a_k$.

On prouve donc par récurrence $\forall k \in [1, p-2]$ $p \mid a_k$.

Partie B : le théorème de Wilson.

B.1) $(2-1)! = 1 \equiv -1 \mod 2$ car $2 \mid 1-(-1)$

B.2.1) $p! = f(1) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + a_{p-1}$

$p! = 1 + \sum_{k=1}^{p-2} a_k + (p-1)!$

B.2.2) $\forall k \in [1, p-2]$ p divise a_k, de plus p divise $p!$.

donc p divise $1+(p-1)!$ et $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

B.3) Supposons $(n-1)! + 1 \equiv 0 \mod (n)$.

Si n ~~n'est pas p~~ Soit p un diviseur strict

de n (p divise n et $p \in [1, n-1]$) alors $p \mid (n-1)!$ et

et $p \mid n$ donc $p \mid ((n-1)! + 1)$. Donc p divise 1

donc $p = 1$. Donc n est premier.

B.4.1) Supposons $n > 4$ $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} m'$ avec $p_1 \neq p_2$ et

$\alpha_1 \geq 1$ $\alpha_2 \geq 1$. et $p_1 \wedge m' = 1$ $p_2 \wedge m'_1 = 1$.

D'après le théorème de Gauss $p_1^{\alpha_1} \wedge (p_2^{\alpha_2} m') = 1$

et $1 < p_1^{\alpha_1} \leq n-1$ donc $p_1^{\alpha_1} \mid (n-1)!$

$1 < p_2^{\alpha_2} m' \leq n-1$ donc $p_2^{\alpha_2} m' \mid (n-1)!$

Une nouvelle application du théorème de Gauss donne.

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} m' \mid (n-1)!$ (car $p_1^{\alpha_1} \wedge (p_2^{\alpha_2} m') = 1$)

B.4.2) $n = p^{\alpha}$ p premier $\alpha > 2$. alors

$p < p^{\alpha-1} \leq n-1$. donc

$(n-1)! = 1 \times \quad \times (p-1) \times p \times (p+1) \quad \times p^{\alpha-1} \times \dots (n-1) = p^{\alpha} K = nk$

et $n \mid (n-1)!$

4.3) On suppose $n = p^2$ p premier et $n > 4$ (en particulier $p \geq 3$ donc p est impair).

$p \geq 3$ et $p \geq 1$ donc $1 < 2p < 3p \leq p^2 = n$.

Donc $(n-1)! = 1 \times p-1 \times p \times \times (2p-1) \times (2p) \times \cdots (n-1)$

$\underline{(n-1)! = k p^2 = k n}$ et $n \mid (n-1)!$

Partie C : le théorème de Wolotenholme.

C.1).

```
def pgcd(a,b):
    if b==0:
        return(a)
    else:
        return (pgcd(b, a % b))
```

```
def h(n):
    if n== 1:
        return ((1,1))
    else:
        s,t= h(n-1)
        s1= n*s + 1
        t1= n*t
        d = pgcd(s1,t1)
        return (s1//d,t1//d)
```

Utilisation possible.

```
for i in range(2,11):
    print h(i).
```

C.2). les calculs ont été fait avec une TI 89.
Instruction : $\Sigma(1/x, x, 1, n)$ avec $n = 4, 6, 10$.

$H_4 = \frac{25}{12}$ $s_4 = 25$ $H_6 = \frac{49}{20}$ $s_6 = 49$ $H_{10} = \frac{7381}{2520}$ $s_{10} = 7381 = 61 \times 121$

$\underline{s_4, s_6 \text{ et } s_{10} \text{ sont bien respectivement divisibles par } 25, 49 \text{ et } 121}$.
$ 5^2 \quad 7^2 \quad 11^2$

C.3) $f(x) = x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \quad + a_{p-2} x + a_{p-1}$ (6)

avec $a_{p-2} = \sum_{1 \leq i_1 < \quad < i_{p-2} \leq p-1} i_1 \times \quad \times i_{p-2}$.

Donc $\frac{a_{p-2}}{(p-1)!} = \sum_{1 \leq i \leq p-1} \frac{1}{i} = H_{p-1}$.

C.4) $f(-p) = (-1)^{p-1} p^{p-1} + (-1)^{p-1} a_1 p^{p-2} + \quad + -p a_{p-2} + a_{p-1}$.

Or p est impair donc $p-1$ est pair.

$f(-p) = p^{p-1} - a_1 p^{p-2} + \quad - p a_{p-2} + a_{p-1}$.

$a_{p-1} = (p-1)!$

et $f(-p) = (-p+1)(-p+2) \quad (-p+p-1) = (-1)^{p-1} (p-1)! = (p-1)!$

donc

$p a_{p-2} = p^{p-1} - a_1 p^{p-2} + . \quad + p^2 a_{p-3}$

et après simplification par p.

$a_{p-2} = p^{p-2} - a_1 p^{p-2} + \quad + p a_{p-3}$

C.5) Donc pour $p \geq 5$ on aura $p-2 \geq 2$ donc $p^2 | p^{p-2}$.
de plus p divise chaque a_k $1 \leq k \leq p-2$ donc p^2 divise a_{p-2}.

Or. $a_{p-2} = s_{p-1} \times \frac{(p-1)!}{t_{p-1}}$ et $\frac{(p-1)!}{t_{p-1}}$ est un entier. (car $(p-1)!$ est un dénominateur commun de $\frac{1}{k}$ $1 \leq k \leq p-1$) premier avec p (car $(p-1)!$ est premier avec p).
Donc d'après le théorème de Gauss, puisque p^2 divise a_{p-2}, p^2 divise s_{p-1}. c.q.f.d.