Problème 2

Partie A : quelques exemples de nombres irrationnels

A.1) Supposons $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, alors

$n q^2 = p^2$, ~~donc~~ $q \mid (nq^2)$ donc $q \mid p^2$

Mais $q \wedge p = 1$ donc $q \wedge p^2 = 1$ et par conséquent $q \mid 1$ et

$q = 1$ et $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$

A.2) Si p est premier ~~alors~~ et $\sqrt{p}$ rationnel, alors, d'après la question précédente il existe q dans $\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{p} = q$, c'est-à-dire $p = q^2$.

$p \mid p$ donc $p \mid q^2$. Or p est premier donc $p \mid q$, donc $p^2 \mid q^2$ donc $p^2 \mid p$, ce qui est impossible car $p \geq 2$.

Donc si p est premier $\sqrt{p}$ est irrationnel.

A.3) Supposons $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ $q \in \mathbb{N}^*$.

alors nécessairement $p \geq 1$ et $q \ln 2 = p \ln 3$, donc

$\ln 2^p = \ln 3^q$ puis $2^p = 3^q$ avec $p \geq 1$ $q \geq 1$. Ceci est impossible par unicité de la décomposition d'un entier en produits de facteurs premiers.

A.4.1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

$$v_n - v_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n\, n!} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-n(n+1) + (n+1)^2 - n}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!} > 0$$

donc (v_n) est strictement décroissante.

De plus $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,n!} = 0$ (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On a par passage à la limite.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1} \le e \le v_{n+1} < v_n.$$

donc $u_q < e < v_q$.

A.4.2) En multipliant terme à terme par $q \cdot q!$

$$\underbrace{q \times \sum_{k=0}^{q} \left(q(q-1)\cdots(k+1)\right)}_{N} < q!\,p < N+1.$$

où N est un entier. Or $q!\,p$ est un entier.

Or il ne peut exister d'entier entre N et N+1 (strictement)

C'est une contradiction. e est donc irrationnel.

Partie B : une preuve de l'irrationalité de π.

B.1.1) $P_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{(ax-bx^2)^n}{n!}\right) = (a-2bx)\,P_{n-1}(x)$

B.1.2) On en déduit le tableau de variation de P_n.

x	0		$\frac{a}{2b} = \frac{\pi}{2}$		$\frac{a}{b} = \pi$
P_n'		$+$	0	$-$	
P_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |P_n(x)| = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\left(a - b\frac{\pi}{2}\right)\right)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n}{n!}$$

B.1.3) $P_n\left(\frac{a}{b}-x\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b}-x\right)^n \cdot (a-a+bx)^n = \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b}-x\right)^n (bx)^n = \frac{1}{n!}(a-bx)^n x^n$

$$P_n\left(\frac{a}{b}-x\right) = P_n(x).$$

A.1.4). P_n est continue positive sur $[0,\pi]$, non identiquement nulle. Donc $\underline{I_n > 0}$

A.1.5) Soit $J_n = \frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$.

$$\underline{\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{a^2}{4b} \times \frac{1}{(n+1)}}. \quad \text{Donc } \underline{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$$

Donc $\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \frac{J_{n+1}}{J_n} \leq \frac{1}{2}$

Donc $\underline{\forall n \geq n_0 \quad J_n \leq J_{n_0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}}$

et par conséquent $\underline{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underline{0 < I_n \leq \pi \max(P_n(x)) = \pi \times \frac{\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n}{n!} = J_n}$.

Donc $\underline{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

A.2.1) . On applique la formule de Leibniz.

Pour $0 \leq k \leq n-1$

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}\frac{n!(-b)^{k-i}}{(n-k+i)}(a-bx)^{n-k+i}$$

or $\underline{k \leq n-1}$ donc $\forall i \in [0,k] \quad n-i > 0$ et

par conséquent $\underline{P_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}}$

De même $\forall i \in [0,k] \quad k-i \in [0,k]$ donc $n-k+i > 0$

et $\underline{P_n^{(k)}\left(\frac{b}{a}\right) = 0 \in \mathbb{Z}}$

A.2.2) La formule de Leibniz reste valable sauf que $\frac{d^i}{dx^i} x^n = 0$ pour $i > n$.

et $\frac{d^{k-i}}{dx^{k-i}} (a-bx)^n = 0$ pour $k-i > n$, $i < k-n$.

Donc $p^{k}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=k-n}^{n} \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} \cdot x^{n-i} (-b)^{k-i} \frac{n!}{(n-k+i)} (a-bx)^{n-k+i}$

Or $\left. x^{n-i} \right|_{x=0} = 0$ si $i \neq n$, 1 si $i = n$.

et $\left. (a-bx)^{n-k+i} \right|_{x=\frac{a}{b}} = 0$ si $i \neq n-k$, 1 si $i = n-k$

On a déduit.

$$p^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n! \, (-b)^{k-n} \underbrace{\frac{n!}{(2n-k)!}}_{\text{entier car } 2n-k \leq n} a^{2n-k}$$

$p^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ $\left(= (-b)^{k-n} \binom{k}{n} (k-n)! \binom{n}{k-n} \right)$

$$p^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n-k} \frac{n!}{(2n-k)!} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-k} \times (-b)^{n} \times n!$$

$$p^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = \binom{k}{n-k} \times (k-n)! \binom{n}{k-n} a^{2n-k} \times (-1)^{n} \times b^{k-n}$$

$p^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$

A.2.3) Si $k \geq 2n+1$ $p_n^{(k)}(x) = 0$ car $\deg P_n = 2n$.

donc $p_n^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \in \mathbb{Z}$.

A.3.1)

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\, dx.$$

$$= \left[-P_n(x)\cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} P_n'(x)\cos x\, dx.$$

$$= +P_n\left(\frac{b}{a}\right) + P_n(0) + \left[P_n'(x)\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} P_n''(x)\sin x\, dx.$$

$$I_n = P_n\left(\frac{b}{a}\right) + P_n(0) - \int_0^{\pi} P_n''(x)\sin x\, dx.$$

On en déduit par récurrence

$$I_n = \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left(P^{(2k)}\left(\frac{b}{a}\right) + P^{(2k)}(0)\right)\right) - (-1)^k \int_0^{\pi} P_n^{2N+2}(x)\sin x\, dx.$$

En choisissant N tel que $2N+2 \geq 2n+1$ $\quad N = n$ par exemple

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(P^{(2k)}\left(\frac{b}{a}\right) + P^{(2k)}(0)\right) \in \mathbb{Z}$$

(d'après la question précédente)

A.3.2) $I_n \in \mathbb{N}^*$ donc $I_n \geq 1$.

(car $I_n \in \mathbb{Z}$ et $I_n > 0$)

Or on a vu $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

c'est une contradiction donc π est irrationnel.

Partie C : développement en Série de Engel et applications.

C.1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq \dfrac{1}{a_0 \quad a_n} \leq \dfrac{1}{a_0^{n+1}} \leq \dfrac{1}{(2)^{\cancel{n+1}}}$.

Or $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{n+1}$ converge car $\frac{1}{a_0} \in [0,1[$.
(séries à termes positifs)

Donc par comparaison $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_0 \dots a_n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \quad a_n} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{n+1} = \frac{1}{a_0} \times \frac{1}{1-\frac{1}{a_0}} = \frac{1}{a_0 - 1}.$$

C.2.1) On montre que $\forall n$ $(x_0, \quad , x_n)$ est bien définie, $(a_0, \quad , a_n)$ aussi et $x_n \in]0,1]$

. Pour $n=0$ $x_0 \in]0,1]$ donc a_0 est bien définie.
. Par conséquent l'hypothèse est valide.

. On suppose le résultat vrai à l'ordre n ..
alors $\frac{1}{x_n} \in [1, +\infty[$.

$$-1 + \frac{1}{x_n} < E\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{1}{x_n}.$$

$$\frac{1}{x_n} < a_n \leq \frac{1}{x_n} + 1$$

$$1 < a_n x_n \leq 1 + x_n.$$

$$0 < x_{n+1} \leq x_n \in]0,1]$$

Donc $x_{n+1} \in]0,1]$ et par conséquent a_{n+1} est définie

C.2.2) On a démontré en C.2.1 que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

C.2.3). $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 1}$ est donc croissante et $u \mapsto 1+E(u)$

est une fonction croissante. donc $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

- On a $x_n \in]0,1]$ donc $\frac{1}{x_n} \geq 1$ donc $E\left(\frac{1}{x_n}\right) \geq 1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}\quad a_n \geq 2$ (en particulier $a_0 \geq 2$).

C.2.4) $x = x_0$ $\quad x_1 = a_0 x_0 - 1$ $\quad x_0 = \frac{1}{a_0} + \frac{x_1}{a_0} = S_0 + \frac{x_1}{a_0}$

le résultat est vrai pour $n=0$.

$x_{n+2} = a_{n+1} x_{n+1} - 1$ $\qquad x_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{x_{n+2}}{a_{n+1}}$

Donc si $x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}$

$$x = S_n + \frac{1}{a_0 \cdots a_n a_{n+1}} + \frac{x_{n+2}}{a_0 \cdots a_n a_{n+1}}$$

$$x = S_{n+1} + \frac{x_{n+2}}{a_0 \cdots a_{n+1}}.$$

le résultat est donc prouvé par récurrence.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} = 0$ $\quad \left(0 \leq \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

donc. $x = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et x admet un développement en série de Engel.

C.3.1). Par définition de n_0 $\quad \forall n \in [0, n_0-1]\quad a_n = b_n$.

Or $[a_0, \ldots] = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_k}\right) = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0}[a_1, \ldots]$

Par conséquent

$$[a_0, a_1, \dots\quad] = [b_0, b_1, \dots\quad]$$

et $a_0 = b_0$ implique

$$[a_1, \dots\quad] = [b_1, \dots\quad]$$

puis par itération jusqu'à $n_0 - 1$.

$$[a_{n_0}, \dots\quad] = [b_{n_0}, \dots\quad]$$

C.3.2). D'après C.1. $x \leq \dfrac{1}{\alpha_0 - 1}$

donc $\alpha_0 x - x \leq 1$.

$\alpha_0 x - 1 \leq x$.

$\alpha_0 \leq 1 + \dfrac{1}{x}$.

D'autre part $x \geq \dfrac{1}{\alpha_0} + \dfrac{1}{\alpha_0\alpha_1} > \dfrac{1}{\alpha_0}$

donc $\alpha_0 > \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{1}{x} < \alpha_0 \leq 1 + \frac{1}{x}.$$

$$\alpha_0 \leq 1 + \frac{1}{x} < \alpha_0 + 1$$

et $\alpha_0 = E\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1 + E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

C.3.3)

Donc Si $[a_{n_0}, \dots\quad] = [b_{n_0}, \dots\quad] = x$.

alors $a_{n_0} = 1 + E\left(\dfrac{1}{x}\right) = b_{n_0}$

ce qui contredit la définition de n_0.

n_0 n'existe donc pas donc $\forall n \in \mathbb{N}\quad a_n = b_n$

et le développement de Engel de x est unique.

9

C.4.1) $[c, \dots,] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{c^{n+1}} = \frac{1}{c-1}$ (calcul déjà fait)

C.4.2) $[2,3,4 \dots] = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e-2.$

C.4.3) $[2,12, -] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} = \mathrm{ch}\,1 - 1.$

C.5) $(\mathrm{ch}\sqrt{2}) - 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1\times \quad \times n)(3\times 5\times \quad \times(2n+1))}$

$= [a_0, \dots a_n$

avec $a_n = (n+1)(2n+3)$

C.6) - Si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \quad a_n = c.$ Or alors (on peut supposer $n_0 \geq 1$)

$x = S_{n_0-1} + \frac{1}{a_0 \quad a_{n_0-1}} [c, \quad , c]$

$x = S_{n_0-1} + \frac{1}{a_0 \cdot a_{n_0-1}} \times \frac{1}{c-1}$

et x est rationnel.

- Réciproquement si x est rationnel. $x = \frac{p}{q}$ avec $p \leq q$

alors $\frac{1}{x} = \frac{q}{p} = \frac{pq_1 + r}{p}$ avec q_1 $r < p$

donc $a_0 = q_1 + 1$ et $x_1 = \frac{p-r}{q}$ avec $p-r \leq p$

On peut écrire $x_n = \frac{p_n}{q}$ où (p_n) est une suite décroissante d'entiers non nuls. Il existe donc n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \; p_n = p_{n_0}$ et la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est donc stationnaire à partir du rang n_0