Centrale - Supélec 2009 - Filière PSI - Mathématiques I

Partie I - Réorganisation des termes d'une série convergente.

I.A.1)

```
def suite(x,n):
    p=0
    q=0
    s=0
    S=0
    res=[]
    for i in range(n):
        if S>x:
            q=1+q
            s=2*q-1
        else:
            p=1+p
            s=2*p
        res =res+[s]
        S = S + (-1)**s/s
```

I.A.2) On constate que la suite S_n semble converger vers x $(=-1)$.

Le principe de l'algorithme consiste à utiliser les termes consécutifs négatifs pour faire baisser S jusqu'à ce qu'on passe en dessous de x, puis de se servir des termes consécutifs positifs pour faire croître S jusqu'à ce qu'on repasse strictement au dessus de x. Puis de recommencer ainsi jusqu'à ce qu'on ait obtenu les n premiers indices utilisés.

I.B) Pour $n=1$ soit $(p_1, q_1) = (0,1)$ soit $(p_1, q_1) = (1,0)$

Dans les deux cas on a bien $\{s(1)\} = \{1\}$ ou $\{s(1)\} = \{2\}$

c'est-à-dire $\{s(1)\} = \{2, \quad, 2p_1\} \cup \{1, 3 \quad, 2q_1 - 1\}$

<u>le résultat se prouve alors par récurrence</u>. On le suppose vrai à l'ordre n.

Si $S_n > x$ alors $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n + 1 = n+1$

$$\{s(1), \quad, s(n+1)\} = \{s(1), \quad, s(n)\} \cup \{2q_{n+1} - 1\}$$
$$= \{2, \quad, 2p_n\} \cup \{1, 3 \quad, 2q_{n+1} - 1\}$$
$$= \{2, \quad, 2p_{n+1}\} \cup \{1, \quad, 2q_{n+1} - 1\}$$

et $S_{n+1} = S_n + u_{s(n+1)} = u_{s(1)} + \quad + u_{s(n+1)}$

le résultat est donc vrai à l'ordre $n+1$. (*) Voir Note

I C 1) Soit $(k_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une suite d'entiers convergente.

Soit ℓ sa limite.

$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \qquad |k_n - \ell| < \frac{1}{2}$

Donc $\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0 \qquad |k_n - k_m| \leq |k_n - \ell + \ell - k_m| \leq |k_n - \ell| + |\ell - k_m| < 1$

$\exists n_0 \quad \forall n, m \quad n \geq n_0 \quad m \geq n_0 \qquad k_n = k_m$

La suite $(k_n)_{n\geq 0}$ est donc constante à partir de n_0 (au moins !)

On remarquera que la réciproque est vraie si une suite d'entiers est constante à partir d'un certain rang alors elle est convergente.

I.C.2.a) On sait déjà que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est croissante car $p_{n+1} = p_n$ ou $p_{n+1} = p_n + 1$. Si elle est majorée elle est constante à partir d'un certain rang

Il existe donc n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \qquad p_n = p_{n_0}$

Donc $\forall n \geq n_0 \qquad q_{n+1} = q_n + 1$ et

$$S_{n+1} = S_n - \frac{1}{2q_{n+1} - 1}$$

Or pour $k \geq n_0 \qquad q_k = q_{n_0} + (k - n_0)$

Donc $\forall k \quad n_0 \leq k < n-1 \qquad S_{k+1} = S_k - \dfrac{1}{2q_{n_0} + 2(k-n_0) + 1}$

et
$$\boxed{S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2(k-n_0) + 1}}$$

Or $\dfrac{1}{2q_{n_0} + 2(k-n_0)+1} \sim \dfrac{1}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} \frac{1}{2k}$ diverge

(et $\forall k \geq n_0 \quad \frac{1}{2k} \geq 0$). Donc $\displaystyle\sum_{k\geq n_0} \frac{1}{2q_{n_0} + 2(k-n_0)+1}$ diverge.

On obtiendrait donc

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty.$$

Note (*) s est injective, car l'image de $[1, n]$ par s est de cardinal $p_n + q_n$, et donc égal à n. Donc $s_{|[1,n]}$ est injective pour tout n. Donc s est injective.

Or ceci implique qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $S_{n_1} < x$.
Pour ce n_1 on obtiendrait $p_{n_1+1} = p_{n_1}+1 \neq p_{n_0}$ si $p_{n_1} = p_{n_0}$
Donc soit $p_{n_1} \neq p_{n_0}$ soit $p_{n_1+1} \neq p_{n_0}$ ce qui contredit
$\forall n \geq n_0 \quad p_n = p_{n_0}$.

I.C.2b) En conclusion $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

I.C.3) Le raisonnement symétrique conduit à $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$

I.C.4) D'après I.B) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} s([1,n]) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{2, \dots, 2p_n\}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{1, \dots, 2q_n-1\}\right)$

Donc $s(\mathbb{N}^*) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} s([1,n]) =$ Pairs $\cup$ Impairs $= \mathbb{N}^*$

et s est donc surjective. On a vu que s était injective.
elle est donc bijective.

I.D.1) Si $S_n > x$ alors $S_{n+1} = S_n + u_{s(n+1)}$
et $u_{s(n+1)} \leq 0$ $\quad |S_{n+1} - x| = |\underbrace{S_n - x}_{\geq 0} + \underbrace{u_{s(n+1)}}_{<0}|$

$$|S_{n+1} - x| = \big|\, |S_n - x| - |u_{s(n+1)}| \,\big|$$
$$|S_{n+1} - x| \leq \max\left(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}|\right)$$

Si $S_n \leq x$ alors $S_{n+1} = S_n + u_{s(n+1)}$
et $|S_{n+1} - x| = |\underbrace{S_n - x}_{\leq 0} + \underbrace{u_{s(n+1)}}_{>0}|$

et on a à nouveau $|S_{n+1} - x| \leq \max\left(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}|\right)$

I.D.2) On a vu que $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty = \lim_{n\to+\infty} q_n$

Donc si $S_N > x$ il existe $n > N$ $S_n \leq x$
si p est le plus petit de ces n alors $p = n+1$ avec $n \geq N$
et on a $S_n > x$ $\quad S_{n+1} \leq x$ donc $|S_{n+1}(x)| \leq |u_{s(n+1)}|$
le raisonnement est similaire si $S_N \leq x$.

I.D.3) $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$ donc $\exists n_1 \ \forall n \geq n_1 \ p_n \geq 1$

$\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ donc $\exists n_2 \ \forall n \geq n_2 \ q_n \geq 1$

Il suffit de prendre $n_0 = \max(n_1, n_2)$

I.D.4) $v_n = \max\left(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|\right)$

On a $|S_{n+1} - x| \leq \max\left(|S_n - x|, |u_{s(n+1)}|\right)$

Or $|u_{s(n+1)}| = |u_{2p_{n+1}}|$ ou $|u_{2q_{n+1}-1}|$

donc $|S_{n+1} - x| \leq v_n$

$|u_{2p_{n+2}}| \leq |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n$ car $p_{n+2} \geq p_{n+1}$

et $(|u_p|)_{p\geq 1}$ est décroissante.

de même $|u_{2q_{n+2}-1}| \leq |u_{2q_{n+1}-1}|$

Donc finalement $\forall n \ v_{n+1} \leq v_n$

et (v_n) est convergente (car décroissante et minorée)

(1) $\lim_{n\to+\infty} |u_{2p_{n+1}}| = 0$ } car $\lim p_{n+1} = \infty$

(2) $\lim_{n\to+\infty} |u_{2q_{n+1}-1}| = 0$ }

De plus $\forall N \ \exists n \geq N \ |S_{n+1} - x| \leq u_{D(n+1)}$.

Donc Il existe une suite extraite

$(S_{\varphi(n)})$ telle que $\lim_{n\to+\infty} |S_{\varphi(n)} - x| = 0$. (3)

De (1), (2) et (3) il résulte $\lim_{n\to+\infty} v_{\varphi(n)} = 0$

Or (v_n) est décroissante minorée donc convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

I.D.5 On a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ or $|S_n - x| \leq v_n$ donc

$\lim_{n\to+\infty} S_n = x$, et le résultat attendu est prouvé

I.E.1) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$ décroissante et possède une limite en $+\infty$ donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,dt \right)_{n \geq 0}$$ est une suite convergente

ce qui veut exactement dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) \quad \text{car} \quad \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

voir en fin de devoir la preuve que $\gamma > 0$

I.E.2) $$\sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

Donc $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \ln(2n) + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2}\gamma + o(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma + o(1)$$

I.E.3.a) La formule $$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$$ se prouve sans difficulté en discutant selon que

$S_n > x$ $\quad p_{n+1} = p_n \quad q_{n+1} = q_n + 1 \quad S_{n+1} = S_n - \frac{1}{2q_{n+1} - 1}$

ou

$S_n \leq x$ $\quad p_{n+1} = p_n + 1 \quad q_{n+1} = q_n \quad S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2p_{n+1}}$

I.E.3 b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty \quad \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$

donc

$$S_n = \frac{1}{2}\ln p_n + \frac{1}{2}\gamma + o(1) - \frac{1}{2}\ln q_n - \ln 2 - \frac{1}{2}\gamma + o(1)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\ln \frac{p_n}{q_n} - \ln 2 + o(1)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln 2 + o(1)$$

I.E.3c) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ldots = x$

Donc

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right) = x + \ln 2 + o(1)$$

$$\ln\frac{p_n}{n-p_n} = 2(x+\ln 2) + o(1)$$

$$\frac{p_n}{n-p_n} = e^{2(x+\ln 2)+o(1)} = 4e^{x}\underbrace{e^{o(1)}}_{\to 1}$$

$$\frac{p_n}{n-p_n} = 4e^{x}(1+o(1))$$

$$p_n = 4e^{x}(1+o(1))(n-p_n)$$

$$p_n = \frac{4e^{x}(1+o(1))}{1+4e^{x}(1+o(1))}\,n$$

et

$$\boxed{p_n \sim \frac{4e^{x}}{1+4e^{x}}\,n}$$

et par conséquent puisque $q_n = n - p_n$

$$q_n = \frac{1}{1+4e^{x}(1+o(1))}\,n$$

$$\boxed{q_n \sim \frac{n}{1+4e^{x}}}$$

I.E.3d) $|u_{\sigma(1)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}| = \sum\limits_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k} + \sum\limits_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k-1}$

$$|u_{\sigma(1)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}| = \frac{1}{2}\ln p_n + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\ln q_n + \frac{1}{2}\gamma + o(1)$$

$$|u_1| + \cdots + |u_n| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

$$\frac{|u_{\sigma(1)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}|}{|u_1| + \cdots + |u_n|} = \frac{\frac{1}{2}\ln p_n + \frac{1}{2}\ln q_n + \gamma + o(1)}{\ln n + \gamma + o(1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln\frac{4e^{x}}{1+4e^{x}} + o(1) + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1+4e^{x}} + o(1) + \gamma + o(1)}{\ln n + \gamma + o(1)}$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{\sigma(1)}| + \cdots + |u_{\sigma(n)}|}{|u_1| + \cdots + |u_n|} = 1}$$

Partie II Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II.A) Si (u_n) est bornée $\exists M \forall n |u_n| \leq M$ et

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |u_n a_n| \leq M|a_n|$ donc

$\sum_{n\geq 0} |u_n a_n|$ converge absolument, donc converge.

Donc $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie (P_1)

II.B.1) $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente donc convergente.

donc $(a_n)_{n\geq 0}$ possède une limite (justification

$$a_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\right) + a_0 \;) \;)$$

II.B.2) (C'est ce qu'on appelle la transformation d'Abel)

Posons $U_{-1} = 0$. Avec cette convention $u_n = U_n - U_{n-1}$

Donc

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n (U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=0}^{N} a_n U_{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=-1}^{N-1} a_{n+1} U_n$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} U_n$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N$$

- ~~Puisque~~ $(a_n)_{n\geq 0}$ possède limite ~~$(a_N)_{N\geq 0}$ est bornée~~

Puisque $(\sum u_n)$ converge $\lim_{N\to+\infty} U_N$ existe.

Donc $\lim_{N\to+\infty} a_N U_N = (\lim_{n\to+\infty} a_n)(\lim_{n\to+\infty} U_n)$ existe

- De plus $(U_n)_{n\geq 0}$ converge donc (U_n) est bornée

Il existe M tel que $\forall n \quad |U_n| \leq M$.

Donc $\forall n \quad 0 \leq |(a_n - a_{n+1}) U_n| \leq M|a_n - a_{n+1}|$ (terme général d'une série convergente à termes positifs)

Donc $\sum_{n\geq 0} (a_n - a_{n+1}) U_n$ converge absolument donc converge

et $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n$ existe.

Finalement $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n u_n$ existe et

$\sum_{n \geq 0} a_n u_n$ converge.

En conclusion pour toute série convergente $\sum u_n$ la série $\sum a_n u_n$ converge donc (a_n) vérifie (P_2)

II.C) question sautée (voir à la fin)

II.D.1) $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$ $a_n = \dfrac{9}{4(n+1)}$

n	p_n	ε_n	A_n	
0	0	1	1	
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{25}{16}$	$A_0 \geq p_0$
2	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	$A_1 \geq p_1$
3	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{121}{64}$	$A_2 \leq p_2$
4	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{641}{320}$	$A_3 \leq p_3$
5	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{41}{20}$	$A_4 \geq p_4$
6	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{2341}{1120}$	$A_5 \leq p_5$

```
def exemple(n):
    eps = 1
    p = 0
    A = 1
    res = [(0, p, eps, A)]
    for i in range(1, n+1):
        if A >= p:
            p = 1+p
            eps = eps/2
        A = A + eps*9/4/(i+1)
        res = res + [(i, p, eps, A)]
    return(res)
```

II. D.2α) L'argument est le même que dans la première partie.

Si pour tout $n > N$ $\quad p_n = p_{n+1}$ alors pour tout $n \geqslant N$ $\quad \varepsilon_n = \varepsilon_N > 0$ et

$$A_n = A_N + \sum_{k=N+1}^{n} \varepsilon_N a_k.$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^{n} a_k = +\infty$. Donc il existe n tel que $A_n \geqslant p_n = p_{N+1}$ donc $p_{n+1} = 1 + p_n$ ce qui est contradictoire.

En prenant $N = n_k$ on en déduit que $\{n \in \mathbb{N}, n > n_k \ p_n = 1 + p_{n+1}\}$ est non vide. Il possède donc un minimum et n_{k+1} est défini si n_k l'est. Or n_0 est définie. Donc $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

II. D.2β) $\forall n \in [n_k, n_{k+1} - 1]$ $\quad p_{n+1} = p_n$ donc $p_{n_{k+1}-1} = p_{n_k}$ et par conséquent $p_{n_{k+1}} = p_{n_k} + 1$

et par récurrence $p_{n_k} = k$, le même raisonnement donc $\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$.

La suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante minorée par zéro. Elle est donc convergente. Une de ses suites extraites converge vers 0 donc $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

$\sum \varepsilon_n a_n$ est une série à termes positifs

$A_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k$ $\quad$ or $A_{n_k - 1} \geqslant p_{n_k - 1} = p_{n_{k-1}} = k - 1$

(A_n) est croissante et $(A_{n_k - 1})$ tend vers $+\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} A_n = +\infty$ et $\sum_{k \geqslant 0}^{\infty} \varepsilon_k a_k$ diverge.

II D.2c) $n_1 = 1$ $n_2 = 2$ $n_3 = 5$

II. D.3a) Pour obtenir la fonction indexer il suffit de modifier légèrement exemple.

```
def indexer(n):
    eps = 1
    p = 0
    A = 1
    res = [(0,0)]
    k = 0
    for i in range(1,n+1):
        if A >= p:
            p = 1+ p
            eps = eps /2
            k = k+1
            res = res + [(k,i)]
        A = A + eps / i+1
    return (res)
```

II. D.3b) On suppose $n_k - 2 \geq n_{k-1}$

On a $\underline{A_{n_k - 1} \geq k-1 = p_{k-1}}$

et $A_{n_k - 2} \leq k-1$

Donc $\underline{A_{n_k - 1} = A_{n_k - 2} + \varepsilon_{n_k - 1} \dfrac{1}{n_k - 1 + 1} \leq k-1 + \dfrac{1}{2^{k-1} n_k}}$

(car $n_k - 1 \geq n_{k-1}$ donc $\varepsilon_{n_k - 1} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ Note (**) $(n_{k+1} - 2 \geq n_k)$)

II. D.3c) $A_{n_{k+1} - 1} - A_{n_k - 1} = \displaystyle\sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_i a_i = \frac{1}{2^k} \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{i+1}$

Comparons $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} \frac{1}{i+1}$ à une intégrale

On a ~~dit~~ que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ était décroissante donc

$\forall i \in [p,q]$ $\displaystyle\int_{i+1}^{i+2} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{i+1} \leq \int_{i}^{i+1} \frac{dx}{x}$

Donc, en sommant et en utilisant la relation de Chasles

$$\ln\left(\frac{q+2}{p+1}\right) = \int_{p+1}^{q+2} \frac{dx}{x} \leq \sum_{i=p}^{q} \frac{1}{i+1} \leq \int_{p}^{q+1} \frac{dx}{x} = \ln \frac{q+1}{p}$$

Dans notre cas cela donne, pour $p = n_k$ et $q = n_{k+1} - 1$

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k - 1} \leq \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

II.D.3 d) On a $A_{n_{k+1}-1} \geqslant k$

$$-A_{n_k - 1} \geqslant -(k-1) - \frac{1}{2^{k-1} n_k}$$

donc $\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \geqslant k - (k-1) - \frac{1}{2^{k-1} n_k}$

soit $\boxed{\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \geqslant 2^k - \frac{2}{n_k}}$

De même $A_{n_{k+1}-1} \leq k + \frac{1}{2^k n_{k+1}}$

$$-A_{n_{k-1}-1} \leq -(k-1)$$

Donc $\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq 1 + \frac{1}{2^k n_{k+1}}$

$$0 \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln(n_{k+1}+1) + \ln(n_k+1)$$

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln(n_{k+1}+1) + \ln(n_k+1) - \ln(n_{k+1}) + \ln(n_k)$$

soit

$$\boxed{\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right)}$$

(Ce résultat est bien valable pour $k \geqslant 3$ car $n_3 - 2 > n_2$ et d'après b) $\forall k \geqslant 3$ $n_k - 2 > n_{k-1}$ (par récurrence), donc les résultats de b) et c) sont valables pour $k \geqslant 3$)

II D.3 e) Soit $u_k = \ln n_k - 2^k$.

Alors $u_{k+1} - u_k = \ln \frac{n_{k+1}}{n_k} - 2^{k+1} + 2^k = \ln \frac{n_{k+1}}{n_k} - 2^k$.

Donc

$$-\frac{2}{n_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

$\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$ donc $\lim_{k\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right)=0$

la suite $\left(\ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right)\right)_{k\geq 3}$ converge donc la

série $\sum_{k\geq 3} \ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x_{k+1}}\right)$ converge (et

c'est une série à termes positifs).

$\forall k \geq 3 \qquad 2^k - \frac{2}{x_k} \geq 2^k - \frac{2}{5} \geq 2^k - 1.$

Donc

$$\ln(x_{k+1}) - \ln(x_k) \geq 2^k - 1$$

Donc

$$\ln(x_k) \geq \sum_{i=3}^{k-1} (2^i - 1) + \ln x_3$$

$$\ln(x_k) \geq 7(k-3) + \ln 5$$

$$x_k \geq c_1 e^{7k}$$

$$\frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{c_1}\left(e^{-7}\right)^k$$

Donc $\sum_{k\geq 3} \frac{1}{x_k}$ converge

Finalement $\alpha \leq |u_{k+1} - u_k| \leq \frac{2}{x_k} + \frac{1}{x_k} + \ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x_{k+1}}\right) = \alpha_k$

(on a majoré $\sup(|a|,|b|)$ par $|a|+|b|$)

Or $\sum \alpha_k$ converge donc $\sum |u_{k+1} - u_k|$ converge donc

$\sum (u_{k+1} - u_k)$ converge absolument donc converge et

finalement $(u_k)_{k\geq 3}$ converge et par conséquent

$u_k = C_1 + o(1)$ soit $\ln x_k = 2^k + C_1 + o(1)$

$$x_k = e^{C_1} e^{2^k} e^{o(1)} \sim e^{C_1} e^{2^k}.$$

On a établi

$$\ln n_k = 2^k + c_1 + o(1)$$

donc $\ln(\ln n_k) = \ln(2^k + c_1 + o(1))$

$$= \ln\left(2^k\left(1 + \frac{c_1}{2^k} + o\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)\right)$$

$$= k \ln 2 + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{c_1}{2^k} + o\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)}_{= o(1)}$$

Donc $\underline{k \sim \dfrac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}}$.

Puisque $-1 + \dfrac{1}{2^{k-1} n_k} = o(k)$ l'encadrement de II.D.3.b)

donne $\underline{A_{n_k} \sim \dfrac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}}$.

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \sim \frac{c e^{2^{k+1}}}{c e^{2^k}} = e^{2^k} \qquad \frac{n_{k+1}}{n_k} = e^{2^k}(1+o(1))$$

Donc $\ln\left(\dfrac{n_{k+1}}{n_k}\right) = 2^k + o(1)$.

Sachant $k \sim \dfrac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$ et $k \sim k+1$.

donc $\underline{\ln(\ln n_{k+1}) \sim \ln(\ln n_k)}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 5)$ $\exists k \geq 3$ $n_k \leq n \leq n_{k+1}$.

On a $A_{n_k} \leq A_n \leq A_{n_{k+1}}$

Donc $A_n \sim \dfrac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$ puisque $A_{n_k} \sim A_{n_{k+1}}$.

De plus $n_k \leq n \leq n_{k+1}$, donc pour la même raison $\ln(\ln n_k) \sim \ln(\ln n)$ et finalement

$$\underline{A_n \sim \frac{\ln(\ln n)}{\ln 2}}.$$

<u>La fonction indexer renverra toujours une liste très courte.</u> (Dont la longueur q est proportionnelle (et même équivalente) à $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln 2}$).

II. E.a) La suite $(\varepsilon'_n) = (\varepsilon_n \text{ signe}(a_n))$ est une suite de réels tendant vers 0 donc $\sum \varepsilon'_n a_n = \sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

II. E.b) Donc $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge, sinon d'après II. D.2) il existe une suite ε_n tendant vers zéro telle que $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n |a_n|$ diverge.

II. F.1) Si $(a_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée, ~~alors~~ on peut en extraire une suite $(a_{n_p})_{p \geq 0}$ avec $\forall p \ |a_{n_p}| \geq (p+1)^2$

On définit alors (x_n) par $x_{n_p} = \text{signe}(a_{n_p}) \times \dfrac{1}{(p+1)^2}$

et $x_n = 0$ si $n \notin \{n_p \mid p \in \mathbb{N}\}$

Alors $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ est une série à termes positifs

$\forall N \quad \sum_{n \leq N} |x_n| \leq \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(p+1)^2}$ et donc

$\sum |x_n|$ converge et par conséquent $\sum x_n$ aussi

Mais $(x_n a_n)$ ne tend pas vers 0 car $\forall p \ |x_{n_p} a_{n_p}| \geq 1$

donc $\sum a_n x_n$ ne converge pas.

Par contraposée (a_n) est donc bornée

II. F.2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n a_{n+1} - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n a_n$

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{N+1} \varepsilon_{n-1} a_n - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n a_n$

$$\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n) = \varepsilon_N a_{N+1} + \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) a_n - \varepsilon_0 a_0$$

. Or puisque (a_N) est bornée $\lim_{N \to +\infty} \varepsilon_N a_{N+1} = 0$

. Puisque $\sum (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)$ converge (car (ε_n) possède une limite)

$\sum (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) a_n$ converge aussi

On en déduit que $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$ converge.

II.F.3) De II.F.2) et II.E.B) il résulte que

$\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4) D'après II.F.3), si (a_n) vérifie (P_2) alors

$\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

Réciproquement d'après II.B) si $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge alors (a_n) vérifie (P_2).

Les suites vérifiant (P_2) sont donc les suites (a_n) telles que $\sum_{n \geq 0} |a_n - a_{n+1}|$ converge. (De telles suites sont dites à variation bornée.)

Oublis et imprécisions

II.C) Prenons $u_n = e^{-i\theta_n}$ si $a_n = e^{i\theta_n} |a_n|$

alors $\sum_{n \geq 0} u_n a_n = \sum |a_n|$ diverge.

Or $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée et $\sum u_n a_n$ diverge

donc (a_n) ne vérifie pas (P_1).

C'est la réciproque II.A.

En conclusion $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie P_1 ssi $\sum |a_n|$ converge.

I.E.1)

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n = \lim_{n \to +\infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right) \right) + \frac{1}{n} \right\}$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \right)}_{>0} > 0$$