# Mines - Ponts - 1989 M - Deuxième épreuve.

## Partie A

**A.1 a)** $\varphi_n(t) = \frac{a_n}{2^n}\left(e^{it/2} + e^{-\frac{it}{2}}\right)^{2n} = \frac{a_n}{2^n}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{\frac{ikt}{2}} e^{-i(2n-k)\frac{t}{2}}$

$\varphi_n(t) = \frac{a_n}{2^n}\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{-i(n-k)t}$. Or pour $k$ dans $[0,n]$ $n-k$ appartient à $[-n,n]$ donc $\boxed{\varphi_n \in T_n}$

**A.1.b)** $\cos^2 u = (1-\sin u)(1+\sin u) \geq (1-\sin u)$ car $\sin u \geq 0$ si $u \in [0,\frac{\pi}{2}]$

On a donc $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u\,du \geq \int_0^{\pi/2} (1-\sin u)^n \cos u\,du = \left[-\frac{1}{n+1}(1-\sin u)^{n+1}\right]_0^{\pi/2}$

soit : $\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u\,du \geq \frac{1}{n+1}}$. D'autre part $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u\,du \geq \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u\,du$

et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{2n} u\,du = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} u\,du$ ($v = -u$) et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u\,du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2n} v\,dv$

($v = \pi - u$) et de même $\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos^{2n} u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u\,du$.

Finalement $1 = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} u\,du \geq \frac{4}{n+1} a_n$ et $\boxed{a_n \leq \frac{n+1}{4}}$

**A.1.c)** Pour $t \in [\delta, \pi]$ $|\varphi_n(t)| \leq \frac{(n+1)}{4}\left(\cos\frac{\delta}{2}\right)^{2n}$ et par conséquent

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[\delta,\pi]} |\varphi_n(t)| = 0.}$

**A.2.a)** On effectue le changement de variable $v = u - t$, il en résulte

$Q_n(u) = \int_{u-\pi}^{u+\pi} \varphi_n(u-v)\, g(v)\,dv$. Or $t \mapsto \varphi_n(u-t)\,g(t)$ est

$2\pi$-période et l'intégrale sur une période ne dépend pas de l'origine de la période.

On aura bien $Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u-t)\,g(t)\,dt$. Or on a vu

que $\varphi_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$, donc $Q_n(u) = \sum_{k=-n}^{n} \beta_k e^{iku}$ avec

$\beta_k = \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} g(t)\,dt$ et $Q_n \in T_n$.

**A.2.b)** Puisque $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\,dt$ on pourra écrire $g(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\,g(u)\,dt$

et finalement :

$$g(u) - Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\left(g(u) - g(u-t)\right) dt.$$

On découpe l'intégrale en 3, et on utilise l'inégalité triangulaire

$|g(u) - Q_n(u)| \leq \int_{-\pi}^{-\delta} \varphi_n(t)\,|g(u) - g(u-t)|\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t)\,|g(u) - g(u-t)|\,dt + \int_{\delta}^{\pi} \varphi_n(t)\,|g(u) - g(u-t)|\,dt$

(On a tenu compte de la positivité de $\varphi_n$). Remarquons $|g(u) - g(u-t)| \leq 2\|g\|_\infty$

$$|g(u) - Q_r(u)| \leq 2\|g\|_\infty (\pi - \delta) \sup_{t\in[-\pi,-\delta]} |\varphi_r(t)| + \sup_{|t|\leq\delta} |g(u)-g(u-t)| \times \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_r(t)\,dt$$
$$+ 2\|g\|_\infty (\pi-\delta) \sup_{t\in[\delta,\pi]} |\varphi_r(t)|.$$

Or $\varphi_n$ est paire, $\delta > 0$ (donc $\pi - \delta \leq \pi$) et $\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_r(t)dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_r(t)dt = 1$.
Par conséquent

$$\boxed{|g(u) - Q_r(u)| \leq 4\pi \|g\|_\infty \sup_{\delta\leq t\leq\pi} |\varphi_n(t)| + \sup_{|t|\leq\delta} |g(u)-g(u-t)|.}$$

**II.2.c)** $g$ est continue sur $[-\pi, 3\pi]$ donc uniformément continue sur cet intervalle.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ (et on peut supposer $\delta < \pi$) $\forall (u,v) \in [-\pi, 3\pi] \quad |u-v| < \delta \Rightarrow |g(u) - g(v)| < \varepsilon$.
Or si $|u - v| < \delta\ (< \pi)$ et $u \in [0, 2\pi]$ alors $v \in [-\pi, 3\pi]$. On en déduit

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in [0, 2\pi] \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |t| < \delta \Rightarrow |g(u) - g(u-t)| < \varepsilon$.

(On aurait pu écrire cela directement en affirmant que toute application continue périodique est uniformément continue)

Donnons $\varepsilon$ et fixons un tel $\delta$. On en déduit

$$|g(u) - Q_r(u)| < \varepsilon + 4\pi \sup_{t\in[\delta,\pi]} \varphi_n(t)\ \|g\|_\infty.$$

Or d'après I.1.c) il existe $n_0$ tel que $\forall r \geq r_0 \quad \sup_{t\in[\delta,\pi]} \varphi_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{4\pi\|g\|_\infty}$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_0 \quad \forall r \geq r_0 \quad \forall u \in [0, 2\pi] \quad |g(u) - Q_r(u)| < 2\varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_0 \quad \forall r \geq r_0 \quad \sup_{u\in\mathbb{R}} |g(u) - Q_r(u)| < 2\varepsilon$.

Ce qui veut exactement dire

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} |g(u) - Q_r(u)| = 0.}$$

**II.2.d)** On suppose $g$ paire.

$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, g(u-t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\, g(t-u)\, dt$$

On pose $v = t - u$

$$Q_r(u) = \int_{-\pi-u}^{\pi-u} \varphi_r(v+u)\, g(v)\, dv = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(v+u)\, g(v)\, dv$$

$$Q_r(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(-u-v)\, g(v)\, dv \quad \text{car } \varphi_r \text{ et } g \text{ sont paires}$$

$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(-u+x)\, g(x)\, dx$ $(v=-x)$ et $Q_n(v) = Q_n(-v)$

$Q_n$ est paire.

$\forall u \in \mathbb{R}$ $Q_n(v) = \frac{1}{2}(Q_n(v) + Q_n(-v)) = \beta_0 + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \beta_k \left(\frac{e^{iku} + e^{-ikv}}{2}\right)$

$\forall u \in \mathbb{R}$ $Q_n(v) = \sum_{k=-n}^{n} \beta_k \cos ku = \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k + \beta_{-k}) \cos ku$

Or $\cos((p+2)u) = (2\cos u)\cos((p+1)(v)) - \cos(pu)$. On prouvera donc par récurrence que $\cos pu$ est un polynôme en $\cos u$ de degré au plus $p$ et par linéarité $Q_n(v) = P_n(\cos u)$. $\deg P_n \leq n$

**A.3 a)** Posons $\tilde{f}(x) = f(-x)$ si $x \in [-1,0]$ $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in [0,1]$
Alors $\tilde{f}$ est continue sur $[-1,1]$. Posons $g(u) = \tilde{f}(\cos u)$ alors $g$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ et $g(-\pi,\pi]$. On peut donc interpréter $g$ comme la restriction à $[-\pi,\pi]$ d'un élément de $\mathcal{F}$. De plus $g$ est paire. Il existe donc une suite de polynômes $(P_n)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \| g(v) - P_n(\cos v)\|_\infty = 0$
soit

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |\tilde{f}(x) - P_n(x)| = 0 \quad \text{ce qui implique}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)| = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|f - P\|_\infty = 0.$$

Donc $\mathcal{F}$ est dense dans $E$ (Théorème de Stone-Weierstrass).

~~I.3 b) On a $\|f\|_2^2 = \int_0^1 f^2(t)\,dt \leq \|f\|_\infty^2$ puis $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. Par conséquent $\|f - P_n\|_2 \leq \|f - P_n\|_\infty$ (avec les notations de la question précédente) et $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_2 = 0$. $\mathcal{F}$ est dense dans $E$ pour la norme $\| \ \|_2$.~~

## Partie B

**B.I. a)** $\sqrt{1-v} = (1-u)^{1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{1/2}^k (-1)^k u^k$ pour $|u|<1$ (Voir Cours)

$C_{1/2}^0 = 1$ $C_{1/2}^1 = \frac{1}{2}$ $C_{1/2}^k = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-k+1\right) = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{2^k\, k!}$

$C_{1/2}^k = \dfrac{(-1)^{k-1}(2k)!}{(2k-1)(2^k k!)^2}$ (vrai aussi pour $k=1$ et $k=0$).

On en déduit $b_n = \dfrac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2}$.

B.1.b) Posons $c_n = \ln(n^{3/2} b_n)$, $g_n = c_{n+1} - c_n = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \frac{b_{n+1}}{b_n}\right)$.

$g_n = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3/2}\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)\right) = \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)$

$g_n = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$g_n \sim -\frac{3}{8n^2}$. D'après la règle de Riemann $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge. Donc la suite $(c_n)_{n\geq 1}$ converge. Si $c$ est sa limite on a donc $\lim_{n\to+\infty} n^{3/2} b_n = e^c$ et $\boxed{(b_n) \sim \left(\frac{e^c}{n^{3/2}}\right)}$.

Une nouvelle application de la règle de Riemann donne la convergence de $\sum_{n\geq 1} b_n$. Or $b_n = \sup_{t\in[0,1]} |b_n u^n|$. Par conséquent

$\sum_{n\geq 1} b_n u^n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$. Sa somme sur $[0,1]$ est continue et $\varphi$ est continue sur $[0,1]$.
Donc $\sum_{n\geq 1} b_n u^n$ converge uniformément vers $\varphi$ sur $[0,1]$.

B.1.c $\forall t\in[0,1]$ $t = \sqrt{1-(1-t^2)} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (1-t^2)^n$. Or l'image de $[0,1]$ par $t \mapsto 1-t^2$ est $[0,1]$. Donc $1 - \sum_{n\geq 1} b_n (1-e_2)^n$, converge uniformément vers $e_1$ (sur $[0,1]$). Ce qui veut dire que $\left(w_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} b_k (1-e_2)^k\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $e_1$ sur $[0,1]$. Or $\forall n$ $w_n \in W$.

B.1.d Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k e_k = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} a_{2k} e_{2k} + e_1 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} a_{2k+1} e_{2k} = A + e_1 B$ où $A$ et $B$ sont deux éléments de $W$. Puisque $B$ est bornée sur $[0,1]$, la suite $(A + w_n B)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $P$. Or $W$ est stable par produit donc $\forall n$ $z_n = A + w_n B \in W$.

$P = \lim_{n\to+\infty, \|\ \|_\infty} z_n$ donc $P \in \overline{W}$ adhérence de $W$ pour la norme $\|\ \|_\infty$.

Par linéarité du passage à la limite $\mathcal{P} \subset \overline{W}$ et finalement, puisque $\overline{W}$ est fermé $E = \overline{\mathcal{P}} \subset \overline{W}$ donc $E = \overline{W}$ et $W$ est dense dans $E$ pour $\|\ \|_\infty$.