Problème II.

II. 1 a) f est $\mathcal{C}^\infty$, donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ pour tout entier n et

$$\forall x \in [0,r[. \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{R_n(f,x)}$$

II. 1. b) $\forall x \in [0,r[$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall t \in [0,x]$ $f^{(n+1)}(t) \geq 0$ et $(x-t)^n \geq 0$

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [0,r[$ $R_n(f,x) \geq 0$

Par conséquent $\forall x \in [0,r[\; \forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(r)}(0)}{n!} x^r \leq f(x)$. $(*)$

Or $\forall x \in [0,r[\left[\forall r \in \mathbb{N} \quad \frac{f^{(r)}(0)}{n!} x^r \geq 0 \quad \text{donc} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)_{r \geq 0} \right]$

est croissante majorée, donc convergente. Soit $g : x \mapsto \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{f^{(r)}(0)}{n!} x^n$

la limite de cette série. Il résulte de $(*)$ que $\forall x \in [0,x[$. $g(x) \leq f(x)$.

De plus il est clair que $\forall x \in [0,r[\; \forall n$ ~~g(x) ≥ 0~~. $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \geq 0$

donc $0 \leq R_n(f,x) \leq f(x)$

La suite $(R_n(f,x))_{r \geq 0}$ est donc bornée.

II. 1. c) Soit x dans $]0,r[$. Effectuons dans $R_n(f,x)$ le changement de variable bijectif $u \mapsto xu = t$.

$$R_r(f,x) = \int_0^1 \frac{x^n(1-u)^n}{n!} f(xu)\, x\,du$$

donc $$\frac{1}{x^{n+1}} R_n(f,x) = \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)\,du.$$

Or $f^{(n+2)} \geq 0$ sur $[0,r[$ donc $\forall u \in [0,1[$ $\forall (x,y)$ $0<x<y<r$

$$f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(xy)$$

De plus $\forall t \in [0,1]$ $(1-t)^n \geq 0$ donc $(1-u)^n f^{(n+1)}(xu) \leq (1-u)^n f^{(n+1)}(yu)$

Par croissance de l'intégrale

$\forall (x,y) \in]0,r[^2$ $0<x<y<r$ $\quad \frac{1}{x^{n+1}} R_r(f,x) \leq \frac{1}{y^{n+1}} R_n(f,y)$

II.1.d) Soit x dans $]0,r[$ et $y = \frac{x+r}{2} \in]x,r[$.

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} R_n(f,x) \leq \frac{1}{y^{n+1}} R_n(f,y) \leq \frac{1}{y^{n+1}} f(y)$$

$$0 \leq R_n(f,x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$$ or $\left(\frac{x}{y}\right) \in [0,1[$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f,x) = 0$

Donc $\forall x \in [0,r[\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

II.2.a) f est de classe C^∞ et absolument monotone sur $]-r,r[$.
donc g et h sont de classe C^∞ sur $]-r,r[$, en particulier sur $[0,r[$.

$\forall x \in [0,r[\quad g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + (-1)^n f^{(n)}(-x)$.

Si n est pair.
$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + f^{(n)}(-x) \geq 0$ car $\forall n \; \forall y \; f^{(n)}(y) \geq 0$

Si n est impair
$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(-x) \geq 0$ car $x \geq -x$ ($x \in [0,r[$) et $f^{(n)}$ est croissante ($f^{(n+1)} \geq 0$)

Donc $\forall x \in [0,r[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad g^{(n)}(x) \geq 0$; g est absolument monotone sur $[0,r[$. Une démonstration similaire montrerait que h aussi.

II.2.b) D'après le II.1.d) on obtient donc

$\forall x \in [0,r[\quad g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Or $f(x) = \frac{g(x)+h(x)}{2}$, en particulier $\frac{g^{(n)}(0)+h^{(n)}(0)}{2} = f^{(n)}(0)$

et $\forall x \in [0,r[\quad f(x) = \frac{1}{2}(g(x)+h(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)+h^{(n)}(0)}{2} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

De même

$\forall x \in [0,r[\quad f(-x) = \frac{1}{2}(g(x)-h(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)-h^{(n)}(0)}{2} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$\forall x \in]-r,0] \quad f(x) = f(-(-x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Donc $\forall x \in]-r,r[. \quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

f est bien développable en série entière sur $]-r,r[$

II.3 a) Montrons par récurrence que : ~~∀x∈~~

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \quad \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} X^k$ avec $a_{n,k} \geq 0$. $\forall k$

le résultat est vrai pour $n = 0$. $P_0(X) = X$.

On suppose le résultat vrai à l'ordre n. Alors

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \tan^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} P_n(\tan x) = (1+\tan^2 x)\, P_n'(\tan x) = P_{n+1}(\tan x)$

avec $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} a_{n+1,k} X^k \quad \forall k.\ a_{n+1,k} = a_{n,k+1} + a_{n,k-1} \geq 0 \quad (a_{n,-1} = a_{n,n+2} = 0)$

Donc le résultat est vrai à l'ordre $n+1$.

On en déduit $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\ \forall n \ \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} (\tan x)^k \geq 0$

tan est donc absolument monotone sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

II.3.β) D'après II.2, on en déduit que tan est développable en série entière sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\qquad \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Or $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \tan(-x) = -\tan x$ donc $(-1)^n \tan^{(n)}(-x) = -\tan^{(n)}(x)$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \tan^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \tan^{(n)}(0)$.

Il en résulte que si n est pair $\tan^{(n)}(0) = 0$ et par conséquent

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\qquad \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Or $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0] \quad \tan x = -\tan(-x)$ donc

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0] \quad \tan x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{n!} (-x)^{2n+1}$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$ tan est développable en série entière

II.3 γ) le rayon de convergence R de cette série est au moins $\frac{\pi}{2}$, puisque la série converge sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Si on avait $R > \frac{\pi}{2}$ alors la somme de série entière serait continue sur $]-R, R[$ et posséderait une limite en $(\frac{\pi}{2})^-$. Or $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$. Donc $R \leq \frac{\pi}{2}$ et

somme de la série entière.

finalement $R = \frac{\pi}{2}$.