Problème III

III. 1) f est polynomiale $f(z)=\sum_{k=0}^{d} a_k z^k$ $|f(z)|\leq \sum_{k=0}^{d} |a_k|\,|z|^k$.

Donc $M(r)\leq \sum_{k=0}^{d}|a_k| r^k = O(r^d)$.

donc $\forall A>0$ $\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{e^{r^A}}=0$ $\left(\frac{M(r)}{e^{r^A}}=O\left(e^{d\ln r - r^A}\right)=o(1)\right)$

$\forall A>0$ $\exists r_0$ $\forall r\geq r_0$ $M(r)\leq e^{r^A}$

et $\underline{\rho(f)=0}$

Remarquons pour la suite que $E_f=\{A\in\mathbb{R}^+, \exists r_0, \forall r\geq r_0\ M(r)\leq e^{r^A}\}$ est un intervalle. En effet si $A\in E_f$ et si r_0 lui est associé alors $\forall B\geq A$ et $\forall r\geq \max(1,r_0)$ $M(r)\leq e^{r^B}$, donc

$B\geq A \Rightarrow B\in E_f$.

III. 2) Etablissons d'abord un résultat qui nous servira plusieurs fois

Lemme 1. $\forall z\in\mathbb{C}$ $|e^z|\leq e^{|z|}$.

Cela résulte de la convergence absolue de $\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}$. Elle implique la convergence et $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}$.

Choisissons maintenant $\underline{f(z)=e^{z^9}}$.

D'une part : $\forall z\in\mathbb{C}$ $|z|=r$ $|f(z)|\leq e^{|z|^9}\leq e^{r^9}$

D'autre part : $\forall r\in\mathbb{R}^+$ $|f(r)|=f(r)=e^{r^9}$

Donc $M(r)=e^{r^9}$.

(Si $A<9$ $\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{e^{r^A}}=+\infty$ donc $A\notin E_f$) Donc $\rho(f)\geq 9$

(Si $A>9$ $\lim_{r\to+\infty}\frac{M(r)}{e^{r^A}}=0$ donc $A\in E_f$) donc $\rho(f)\leq 9$

et finalement $\underline{\rho(f)=9}$

III.3. Soit $f(z) = e^{e^z}$ et supposons d'abord f développable (2)

en série entière sur $\mathbb{C}$.

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = r \qquad |f(z)| \leq e^{|e^z|} \leq e^{e^{|z|}} \leq e^{e^r}$

et $\forall r \in \mathbb{R}^+ \qquad |f(r)| = e^{e^r}$.

Donc $\forall r \geq 0 \qquad M(r) = e^{e^r}$.

Donc $\forall A \geq 0 \qquad \lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{M(r)}{e^{r^A}} = \lim\limits_{r \to +\infty} e^{e^r - r^A} = +\infty$

$\forall A \geq 0 \qquad A \notin E_f$

$E_f = \emptyset$ et $\rho(f) = +\infty$.

Montrons maintenant que f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.

Soit z dans $\mathbb{C}$ $\qquad f(z) = e^{e^z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(e^z)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{nz}}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(nz)^p}{p!\,n!}}_{u_{n,p}}$

Montrons que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum\limits_{p\geq 0} |u_{n,p}|$ converge vers $\dfrac{e^{n|z|}}{n!}$.

$\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{e^{n|z|}}{n!}$ converge vers $e^{e^{|z|}}$.

Donc $(u_{n,p})$ est sommable.

On peut donc permuter les signes de sommation et

$f(z) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^p}{n!\,p!} \right) z^p$. Ce qui prouve que f est développable.

III.4. Si $|z| = r \qquad |\sin z| \leq \dfrac{e^{|z|} + e^{|z|}}{2} \leq e^r$. donc $M(r) \leq e^r$

$\forall r \geq 0 \quad |\sin ir| = \dfrac{e^r - e^{-r}}{2}$ donc $M(r) \geq \dfrac{e^r - e^{-r}}{2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^r}{2}$

Si $A < 1 \quad \lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{M(r)}{e^{r^A}} = +\infty$ donc $\rho(f) \geq 1$

Si $A > 1 \quad \lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{M(r)}{e^{r^A}} = 0$ donc $\rho(f) \leq 1$

$\Big\}\ \rho(f) = 1$

III. 5. a) Etablissons un lemme préliminaire ③

Lemme 2. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors pour tout r de $]0, R[$ et tout entier n $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$.

(Formule de Cauchy).

—

Soit n un entier fixé, r dans $]0, R[$ fixé.

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad f(re^{it}) e^{-int} = \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{a_p r^p e^{i(p-n)t}}_{v_p(t)}$$

(•) Chaque v_p est continue sur $[0, 2\pi]$.

(••) $\begin{cases} \forall t \in [0, 2\pi] \ \forall p \in \mathbb{N} \quad |v_p(t)| \le |a_p| r^p \\ \text{et } \sum_{p \geq 0} |a_p| r^p \text{ converge car } 0 < r < R. \end{cases}$

Donc $\sum_{p \geq 0} v_p$ converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, 2\pi]$.

On déduit de (•) et (••) qu'on peut permuter intégration et sommation et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t} dt$$

Or si k est ~~entier~~ dans $\mathbb{Z}$ $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 2\pi \text{ si } k = 0 \\ \left[\frac{1}{ik} e^{ikt}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$

On obtient donc $\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt = 2\pi a_n r^n$.

q.e.d.

—

On aura donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r \in]0, +\infty[$ (car ici $R = +\infty$)

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| \times 1 \, dt \le \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} M(r) dt = r^{-n} M(r)$$

$$\underline{\underline{|a_n| \le r^{-n} M(r)}}$$

III.5 b) Soit $B < \frac{1}{\rho(f)}$ alors $\rho(f) < \frac{1}{B}$

(Rq. On autorise $\rho(f) = +\infty$, mais dans ce cas la série $\sum a_n 1^n$ par exemple converge donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\exists n_0\ \forall n \geq 0\ -\ln|a_n| \geq 0$, donc $\liminf\left(-\frac{\ln|a_n|}{n\ln n}\right) \geq 0 = \frac{1}{\rho(f)}$ et le résultat reste vrai).

Puisque $\rho(f) < \frac{1}{B}$ on a $\frac{1}{B} \in E_f$ donc $\exists r_0 \geq 0\ \forall r \geq r_0\ M(r) \leq e^{r^{\frac{1}{B}}}$

On aura $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall r \geq r_0\ |a_n| \leq r^{-n} e^{r^{\frac{1}{B}}}$

$\forall n \in \mathbb{N}\quad \forall r \geq r_0\quad \ln|a_n| \leq -n\ln r + r^{\frac{1}{B}}$

$$-\ln|a_n| \geq n\ln r - r^{\frac{1}{B}} = \varphi_{n,B}(r) = \varphi(r)$$

$\varphi'(r) = \frac{n}{r} - \frac{1}{B} r^{\frac{1}{B}-1} = \frac{1}{Br}\left(nB - r^{\frac{1}{B}}\right)$ donc φ admet un minimum en $(nB)^{\frac{1}{B}}$

Pour n assez grand on a $(nB)^{\frac{1}{B}} \geq r_0$ $\left(n \geq \frac{r_0^{\frac{1}{B}}}{B}\right)$ donc on est dans le domaine d'application de la majoration.

$\exists n_1\quad \forall n \geq n_1\qquad -\ln|a_n| \geq \varphi\left((nB)^{\frac{1}{B}}\right) = nB\ln n + n(B\ln B - B)$

$$-\frac{\ln|a_n|}{n\ln n} \geq B + \frac{B\ln B - B}{\ln n}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0\quad \exists n_2\quad \forall n \geq n_2\quad -\frac{\ln|a_n|}{n\ln n} \geq B - \varepsilon.$

Par caractérisation de la borne inférieure.

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{n\ln n} \geq B$$

Par conséquent $\quad B < \frac{1}{\rho(f)} \Rightarrow B \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{n\ln n}$

donc
$$\frac{1}{\rho(f)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{n\ln n}.$$

Remarque : il y a en fait égalité. L'autre inégalité est ~~plus~~ délicate.

III.6.a) Si $(U_n)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$, alors, par contraposée

$$\exists A>0 \quad \forall n_0\in\mathbb{N} \quad \exists n\geq n_0 \quad u_n<A.$$

Si on choisit un tel A on peut donc extraire de $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ majorée par A. Comme elle est aussi minorée, on peut extraire de cette suite une suite $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 0}$ convergente et $(v_n)_{n\geq 0}$ possède donc une valeur d'adhérence.

Réciproquement si $(u_n)_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence ℓ, on peut extraire de $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente. Si $(U_n)_{n\geq 0}$ tendait vers $+\infty$ cette suite extraite aussi. C'est contradictoire.

III.6.b) + $[n+1,+\infty[\ \subset [n,+\infty[$ donc $\inf\limits_{p\in[n+1,+\infty[} u_p \geq \inf\limits_{p\in[n,+\infty[} u_p$

et $(v_n)_{n\geq 0}$ est donc croissante.

+ Si $\ell\in\mathcal{A}(U)$, alors $\forall\varepsilon>0$ $\{p,\ u_p<\ell+\varepsilon\}$ est infini

(Si $\ell=\lim\limits_{p\to+\infty} u_{\varphi(p)}$ $\exists p_0\ \forall p\geq p_0\quad u_{\varphi(p)}<\ell+\varepsilon$).

Donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists p\geq n\quad u_p<\ell+\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n<\ell+\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad v_n<\ell+\varepsilon$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\leq\ell$.

III.6.c) $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante majorée donc elle converge.

et si $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ ℓ est un minorant de $\mathcal{A}(U)$.

De plus $\forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\quad \forall n\geq n_0\ \ell+\frac{\varepsilon}{2}\geq v_n \geq \ell-\frac{\varepsilon}{2}$.

Par caractérisation de la borne ~~supérieure~~ inférieure.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists p\geq n\quad v_n\leq u_p\leq v_n+\frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad \exists p\geq n\quad \ell-\varepsilon\leq u_p\leq \ell+\varepsilon$

On choisit $\varepsilon=1$ $n_0=0$ on obtient un p_0. On suppose construit $p_0<\dots<p_k$ avec $\ell-\frac{1}{2^i}\leq u_{p_i}\leq \ell+\frac{1}{2^i}$, on choisit $n=p_{k+1}$ $\varepsilon=\frac{1}{2^{k+1}}$ on obtient p_{k+1}. La suite $(u_{p_k})_{k\geq 0}$ tend vers ℓ ~~donc~~

Donc $\underline{\ell \in \mathcal{A}(U)}$, $\underline{\ell \text{ est bien le minimum de } \mathcal{A}(U)}$.

III.6.e. + On vient de voir que ℓ est valeur d'adhérence.
donc $\forall \varepsilon > 0$ $\{n, u_n < \ell + \varepsilon\}$ est infini.
+ S'il existait une infinité de ~~ℓ~~ n tels que $u_n < \ell - \varepsilon$
alors $(u_n)_{n \geq 0}$ possèderait une valeur ~~p~~ d'adhérence $\leq \ell - \varepsilon$, ce qui contredit la minimalité de ℓ.

Donc ℓ vérifie la propriété donnée.

Réciproquement soit ℓ' vérifiant cette propriété.
+ De $\forall \varepsilon > 0$ $\{n, u_n < \ell' + \varepsilon\}$ est infini
on déduit que $\forall \varepsilon > 0$ $(u_n)_{n \geq 0}$ possède une valeur d'adhérence inférieure à $\ell' + \varepsilon$. Donc $\forall \varepsilon > 0$ $\ell \leq \ell' + \varepsilon$.

+ De $\forall \varepsilon > 0$ $\{n, u_n > \ell' - \varepsilon\}$ est fini
on déduit que $\forall \varepsilon > 0$ $(u_n)_{n \geq 0}$ ne possède pas de valeur d'adhérence inférieure à $\ell' - \varepsilon$ Donc $\forall \varepsilon > 0$ $\ell \geq \ell' - \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\qquad \ell' - \varepsilon \leq \ell \leq \ell' + \varepsilon$

Donc $\ell = \ell'$ et la propriété donnée caractérise bien ℓ.