Mines - Ponts 1994

Math I - MP

Première partie

I.1a) - ~~$f_n(t)$~~ $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^{\alpha})^n}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$. En $+\infty$ $f_n(t) \sim \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$ avec $\alpha n > 1$ donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $u_n(\alpha)$ est bien définie.

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall t \in [0,+\infty[\quad \dfrac{1}{(1+t^{\alpha})^{n+1}} \leq \dfrac{1}{(1+t^{\alpha})^n}$. Par croissance de l'intégrale on en déduit que $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- $(U_n(\alpha))_{n\geq 0}$ est décroissante, minorée par 0 donc convergente.

I.1.b) • $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur $[0,1[$

• f_n converge simplement vers $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x)=0$ si $x \neq 0$ $f(0)=1$. qui est continue par morceaux et intégrable.

• $(f_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et f_1 est intégrable.

En appliquant le théorème de convergence monotone on peut donc affirmer que $(U_n(\alpha))_{n\geq 1} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} f_n\right)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\int_{\mathbb{R}^+} f \ (=0)$.

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n(\alpha) = 0}$

I.1.c) En appliquant la relation de Chasles $u_n(\alpha) = \int_0^a f_n(t)dt + \int_a^1 f_n(t)dt + \int_1^{+\infty} f_n(t)dt$

Or $\forall t \in [0,a]$ $f_n(t) \leq 1$ $\forall t \in [a,1]$ $f_n(t) \leq \dfrac{1}{(1+a^{\alpha})^n}$ et $\forall t \in [1,+\infty[$ $f_n(t) \leq \dfrac{1}{t^{\alpha n}}$. En utilisant à nouveau la croissance de l'intégrale on obtient :

$$0 \leq U_n(\alpha) \leq a \times 1 + (1-a) \times \frac{1}{(1+a^{\alpha})^n} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha n}}$$

soit

$$0 \leq U_n(\alpha) \leq a + \frac{1}{(1+a^{\alpha})^n} + \frac{1}{n\alpha - 1} \qquad (\text{si } a \in [0,1].)$$

Soit $\varepsilon > 0$ choisissons $a = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right)$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+a^{\alpha})^n} + \dfrac{1}{n\alpha-1} = 0$. Donc $\exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \dfrac{1}{(1+a^{\alpha})^n} + \dfrac{1}{n\alpha-1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Finalement $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ 0 \leq U_n(\alpha) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n(\alpha) = 0}$.

I.2.a) Intégrons par parties :

$$\int_0^X \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^\alpha)^n}\right]_0^X + n\alpha \int_0^X \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,dt$$

En faisant tendre X vers $+\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} = 0 + n\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}}\,dt$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $t^\alpha = (t^\alpha+1) - 1$ pour obtenir $u_n(\alpha) = n\alpha\,(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$.

- Il en résulte $(n\alpha - 1)\,u_n(\alpha) = n\alpha\, u_{n+1}(\alpha)$

soit $u_{n+1}(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) u_n(\alpha)$. Par conséquent

$u_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) u_1(\alpha)$ le produit valant 1 si $n=1$.

I.2.b) - $U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha\,(u_k(\alpha) - u_{k+1}(\alpha)) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha\, u_k(\alpha) - \sum_{k=1}^{n} k\alpha\, u_{k+1}(\alpha)$

$$U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha\, u_k(\alpha) - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\alpha\, u_k(\alpha) = \alpha\, u_1(\alpha) + \sum_{k=2}^{n} (k\alpha - (k-1)\alpha)\, u_k(\alpha) - (n\alpha)\, u_{n+1}(\alpha)$$

$$U_n(\alpha) = \alpha\, u_1(\alpha) + \sum_{k=2}^{n} \alpha\, u_k(\alpha) - n\alpha\, u_{n+1}(\alpha) = \alpha\, U_n(\alpha) - n\alpha\, U_{n+1}(\alpha)$$

et puisque $\alpha > 1$, $U_n(\alpha) = \frac{n\alpha}{\alpha - 1}\, u_{n+1}(\alpha)$

- A l'aide de la formule précédente $U_n(\alpha) = \frac{n\alpha}{\alpha-1} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) u_1(\alpha)$.

Si la suite $U_n(\alpha)$ converge, c'est vers une limite strictement positive ℓ ($\ell \geq u_1(\alpha) > 0$).

Il existe donc n_0 $\forall n \geq n_0$ $u_{n+1} \geq \frac{\alpha-1}{n\alpha} \times \frac{\ell}{2} = \frac{c}{n}$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge. Ce qui est contradictoire.

Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} U_n(\alpha) = +\infty$ et $\sum_{n\geq 1} u_n(\alpha)$ est divergente.

I.2.c. $\frac{U_n(\alpha)}{n} = \alpha(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$, donc

$$V_n(\alpha) = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k(\alpha)}{k} = \alpha \sum_{k=1}^{n} (u_k(\alpha) - U_{k+1}(\alpha)) = u_1(\alpha) - u_{n+1}(\alpha).$$

Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} V_n(\alpha) = \alpha u_1(\alpha)$. $\sum_{n\geq 1} v_n(\alpha)$ converge et

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(\alpha) = \alpha u_1(\alpha)}$$

I.3) $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = \ln \frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} + \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\alpha} = \ln\left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

En utilisant le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0.

$$w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = -\frac{1}{n\alpha} - \frac{1}{2n^2\alpha^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n} - \frac{1}{2\alpha n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) = -\frac{(\alpha+1)}{2\alpha^2} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha) \sim \frac{c}{n^2}$$

D'après le critère de Riemann $\sum_{n\geq 1}(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$ converge. Par conséquent la suite $(w_n(\alpha))_{n\geq 1}$ converge. Soit $\ell(\alpha)$ sa limite. Par continuité de exp la suite $(\exp(w_n(\alpha)))$ converge vers $K(\alpha) = \exp(\ell(\alpha)) > 0$. Soit $\lim_{n\to+\infty} u_n(\alpha) n^{1/\alpha} = K(\alpha)$

et puisque $K(\alpha) \neq 0$ $\quad \boxed{u_n(\alpha) \sim \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}}$.

(Rq: puisque $1/\alpha < 1$, on retrouve la divergence de $(U_n(\alpha))$, et puisque $1 + \frac{1}{\alpha} > 1$ on retrouve la convergence de $(V_n(\alpha))$).

Deuxième partie.

II 1°) - à x fixé : $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

en 0 $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$ donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x-1 > -1$. En $+\infty$ $t^{x-1}e^{-t} = O(e^{-t/2})$ et $t \to e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

En conclusion $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable si et seulement si $x > 0$.

Le domaine de définition de Γ est donc $]0,+\infty[$

- Intégrons par parties : $x\int_0^X t^{x-1}e^{-t}dt = \left[t^x e^{-t}\right]_0^X + \int_0^X t^x e^{-t}dt$.

En faisant tendre X vers $+\infty$ $\quad x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.

- La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[1,A] \times]0,+\infty[$ et

$\forall (x,t) \in [1,A]\times]0,+\infty[\qquad |f(x,t)| \leq \max(1,t)^{A-1} e^{-t} = \varphi(t)$

en $+\infty$ $\varphi(t) = O(e^{-t/2})$ et φ est donc intégrable.

Le théorème sur la continuité d'une intégrale nous permet d'affirmer que Γ est continue sur $[1, A]$ pour tout A donc sur $[1, +\infty[$.
$\forall x \in]0, +\infty[\qquad \Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$ et $x \mapsto \Gamma(x+1)$ est continue sur $]0^+, \infty[$ donc $\underline{\Gamma \text{ est continue sur }]0, +\infty[}$

$\underline{\text{II. 2a)}}$ $\forall u \geq 0 \quad e^{u} \geq 1+u$ donc $e^{-u} = \frac{1}{e^{u}} \leq \frac{1}{1+u}$.
Par conséquent $e^{-nt^\alpha} = (e^{-t^\alpha})^n \leq \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}$.

Par conséquent $u_n(\alpha) \geq \int_0^{+\infty} e^{-nt^\alpha} dt$.
On effectue le changement de variable $v = +nt^\alpha$
$t = \frac{1}{n^{1/\alpha}} v^{1/\alpha}$, $dt = \frac{1}{\alpha n^{1/\alpha}} v^{1/\alpha - 1} dv$, et on obtient
$u_n(\alpha) \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{n^{1/\alpha}} v^{1/\alpha - 1} \frac{e^{-v}}{\alpha} dv$. C'est à dire $\boxed{c_n(\alpha) \geq \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$

$\underline{\text{II. 2.b)}}$ $\lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. ~~Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta \ \forall t \in]0, \eta[$~~

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall t \in]0, \eta[\quad \frac{\ln(1+t)}{t} \geq (1-\varepsilon)$
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall t \in]0, \eta[\quad \ln(1+t) \geq (1-\varepsilon) t$.
L'inégalité reste vraie pour $t = 0$. En prenant $a = \eta^{1/\alpha}$
on aura. $\forall t \in [0, a] \quad \ln(1+t^\alpha) \geq t^\alpha(1-\varepsilon)$, et
comme dans la question précédente, en passant à l'exponentielle
$\forall t \in [0, a] \quad \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leq \exp(-n(1-\varepsilon) t^\alpha)$

$\underline{\forall t \in [0, a] \quad t(1-\varepsilon) \leq \ln(1+t) \quad (\text{si on suppose } \eta < 1 \quad \eta^{1/\alpha} > \eta)}$

$\underline{\text{II 2.c)}}$ On en déduit, à l'aide de la relation de Chasles
$u_n(\alpha) \leq \int_0^a \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n} + \frac{1}{(1+a^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$ (comme dans la première question).
$u_n(\alpha) \leq \int_0^a \exp(-n(1-\varepsilon) t^\alpha) dt + \frac{1}{(1+a^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$

Donc $\alpha n^{1/\alpha} u_n(\alpha) = c_n(\alpha) \leq \alpha n^{1/\alpha} v_n(\alpha, \varepsilon)$.
$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1/\alpha}}{(1+a^\alpha)^n} = 0$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1/\alpha}}{n\alpha - 1} = 0$ car $1/\alpha < 1$.

$$\int_0^a \exp(-n(1-\varepsilon)t^\alpha)\,dt = \frac{1}{\alpha n^{1/\alpha}(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}\int_0^{n(1-\varepsilon)a^\alpha} v^{1/\alpha - 1} e^{-v}\,dv$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha n^{1/\alpha}\int_0^a \exp(-n(1-\varepsilon)t^\alpha)\,dt = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha n^{1/\alpha} v_n(\alpha,\varepsilon) = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).}$

II.2.d) Soit $\delta > 0$ puisque $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

il existe $\varepsilon < 0$ tel que $\frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}\Gamma(1/\alpha) \leq \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\delta}{2}$.

On fixe un tel ε.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha n^{1/\alpha} v_n(\alpha,\varepsilon) = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{1/\alpha}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \quad \alpha n^{1/\alpha} v_n(\alpha,\varepsilon) \leq \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \delta$.

Par conséquent : $\forall\delta > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq c_n(\alpha) \leq \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \delta$.

Ce qui veut exactement dire :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n(\alpha) = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).}$$

II.3) D'après I.3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(\alpha)\times n^{1/\alpha} = K(\alpha)$.

Donc $\boxed{K(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right) = K(\alpha)$

Troisième partie

III.1) - On a vu $u_n(\alpha) \sim \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$. Donc $(u_n(\alpha)x^n)_{n\geq 1}$ est bornée si $|x| \leq 1$, non bornée si $|x| > 1$ et par conséquent $R = 1$.

Pour $x = 1$, F n'est pas définie car $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(\alpha)$ diverge.

- On sait que $(1-x)^{\beta-1}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$

et $\forall x \in]-1,1[\quad (1-x)^{\beta-1} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_{\beta-1}^k (-1)^k x^k$ avec $C_{\beta-1}^0 = 1$

et $C_{\beta-1}^k = \frac{(\beta-1)\ldots(\beta-1-k+1)}{k!}$ pour $k \geq 1$.

Sachant que $\beta = \frac{1}{\alpha}$ on aura pour $k \geq 1$

$$C_{\beta-1}^k = \frac{(-1)^k}{k!}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) \ldots \left(k - \frac{1}{\alpha}\right).$$

$$c_{\beta-1}^{k} = (-1)^{k}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\alpha k}\right) = (-1)^{k}\frac{u_{k+1}(\alpha)}{u_1(\alpha)}$$

En conclusion $\forall x \in]-1,1[\quad (1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{u_1(\alpha)}\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1}(\alpha)\, x^{k}$

et $\boxed{\forall x \in]-1,1[\qquad F(x) = u_1(\alpha)\, x\, (1-x)^{\beta-1}}$

III.2) - Le rayon de convergence de cette série entière est 1 (même justification que pour la question précédente).

- $\alpha > 1$ donc $\beta \in]0,1[$ et d'après le critère de Riemann $\sum_{n\geq 1} n^{-\beta}$ n'est pas convergente et $G(1)$ n'est pas défini.

- $t^{-\beta}x^{t} = \exp(-\beta \ln t + t\ln x)$. On $\beta > 0$ $\ln x < 0$ donc $t \mapsto -\beta\ln t + t\ln x$ est décroissante. Par conséquent, puisque exp est croissant $t \to t^{-\beta}x^{t}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$.

On en déduit

$$\forall t \in [n,n+1] \quad (n+1)^{-\beta}x^{n+1} \leq \int_n^{n+1} t^{-\beta}x^{t}\,dt \leq n^{-\beta}x^{n}.$$

En sommant

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^{-\beta}x^{n+1} \leq \int_1^{N+1} t^{-\beta}e^{t\ln x}\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} n^{\beta}x^{n}.$$

puis

$$\sum_{n=1}^{N+1} n^{-\beta}x^{n} - x \leq \int_1^{N+1} t^{-\beta}e^{-t\ln\frac{1}{x}}\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} n^{\beta}x^{n}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ il en résulte

$$G(x) \leq x + \int_1^{+\infty} t^{-\beta}e^{-t\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\,dt$$

et $G(x) \geq \int_1^{+\infty} t^{-\beta}e^{-t\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\,dt$

Dans l'intégrale on effectue le changement de variables $u = t\ln\frac{1}{x}$

$$\int_1^{+\infty} t^{-\beta}e^{-t\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\,dt = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\beta-1}\int_{\ln\frac{1}{x}}^{+\infty} u^{-\beta}e^{-u}\,du$$

Or $\lim_{x\to 1}\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim_{x\to 1^-}\int_{\ln\frac{1}{x}}^{+\infty} u^{-\beta}e^{-u}\,du = \Gamma(1-\beta)$

et finalement, puisque $\ln \frac{1}{x} \underset{x \to 1^-}{\sim} (1-x)$ et $\beta - 1 < 0$, on déduit de l'encadrement

$$\boxed{G(x) \sim \frac{\Gamma(1-\beta)}{(1-x)^{1-\beta}}}$$

III.3) Or a vu que $(u_n(\alpha))_{n \geq 1} \sim \left(\frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}} \right)_{n \geq 1}$. Par définition même de la relation $\sim$ on en déduit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \qquad (1-\varepsilon)\frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}} \leq u_n(\alpha) \leq (1+\varepsilon)\frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$$

Par stabilité de $\leq$ vis-à-vis de $+, \times, \cdot$ et lim et en écrivant

$$F(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(\alpha) x^n + \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n(\alpha) x^n, \quad G(x) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta} x^n + \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{1}{n^\beta} x^n,$$

on en déduit :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in]0,1[$

$$(1-\varepsilon) K(\alpha) G(x) + \sum_{n=1}^{n_0-1} \left(u_n(\alpha) - \frac{(1-\varepsilon)K(\alpha)}{n^\beta} \right) x^n \leq F(x) \leq (1+\varepsilon) K(\alpha) G(x) + \sum_{n=1}^{n_0-1} \left(u_n(\alpha) - (1+\varepsilon)\frac{K(\alpha)}{n^\beta} \right) x^n$$

Or $\lim_{x \to 1^-} G(x) K(\alpha) = +\infty$ et $\sum_{n=1}^{n_0-1} \left(u_n(\alpha) - \frac{(1 \pm \varepsilon)K(\alpha)}{n^\beta} \right) x^n$ sont bornées au voisinage de 1. Par conséquent les membres de gauche et de droite de l'inégalité précédente sont respectivement équivalents à

$(1-\varepsilon) K(\alpha) \Gamma(\beta) (1-x)^{\beta-1}$ et $(1+\varepsilon) K(\alpha) \Gamma(\beta) (1-x)^{\beta-1}$ lorsque x tend vers 1^-. Donc :

$\exists A_+ \quad \forall x \in]0,1[\quad x > A_+ \quad (1-2\varepsilon) K(\alpha) \Gamma(\beta) (1-x)^{\beta-1} \leq F(x)$

$\exists A_- \quad \forall x \in]0,1[\quad x > A_- \quad (1+2\varepsilon) K(\alpha) \Gamma(\beta) (1-x)^{\beta-1} \geq F(x)$

Donc $\forall \varepsilon \, \exists A \; (= \max(A_+(\varepsilon/2), A_-(\varepsilon/2)))$ tel que

$\forall x \in]0,1[\quad x > A \quad (1-\varepsilon) K(\alpha) \Gamma(1-\beta) (1-x)^{\beta-1} \leq F(x) \leq (1+\varepsilon) K(\alpha) \Gamma(1-\beta) (1-x)^{\beta-1}$

et finalement

$$\boxed{F(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} K(\alpha) \Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) (1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) (1-x)^{\beta-1}}$$

III.4.a) D'après III.2), on en déduit $\boxed{u_1(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}$

III.4.b) $u_1(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{2 \times u(2)} = \sqrt{\pi}}$.

Quatrième partie.

IV.1.a) Soit $f_\beta : (x,\theta) \longmapsto \dfrac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}$. f est continue sur

$]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ car $\forall x \in]0,+\infty[$. $\forall \theta \in]-\pi,\pi[$. $1+xe^{i\theta} \neq 0$

En effet $1+xe^{i\theta} = 1+x\cos\theta + i\, x\sin\theta$, donc $1+xe^{i\theta}=0$

implique $x\sin\theta = 0$, puis $\theta = 0$ (car $\theta \in]-\pi,\pi[$) puis $1+x=0$

ce qui est impossible car $x>0$.

- De plus $|f_\beta(x,\theta)| \underset{x\to 0}{\sim} x^{\beta-1}$ avec $\beta-1>-1$ car $\beta>0$

et $|f_\beta(x,\theta)| \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\beta-2}$ avec $\beta-2<-1$ car $\beta<1$.

Donc d'après le critère de Riemann : $\forall \theta \in]-\pi,\pi[$ $x \mapsto f_\beta(x,\theta)$ est intégrable et $\underline{\varphi \text{ est bien définie sur }]-\pi,\pi[}$ (*)

IV.1.b) ~~Soit $\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[$; alors~~

$\forall x \in]0,\frac{1}{2}[$. $\left|\dfrac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\right| \leq \dfrac{x^{\beta-1}}{1-x}$ qui est intégrable

donc $\theta \mapsto \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx$ est continue sur $]-\pi,\pi[$.

De même $\forall x \in]2,+\infty[$ $\left|\dfrac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\right| \leq \dfrac{x^{\beta-1}}{x-1}$ qui est intégrable

donc $\theta \longmapsto \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx$ est continue sur $]-\pi,\pi[$.

Puisque f_β est continue sur $[\frac{1}{2},2]\times]-\pi,\pi[$. la fonction

$\theta \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^{\beta-1}}{1+xe^{i\theta}}\,dx$ est continue sur $]-\pi,\pi[$.

Finalement, en sommant grâce à la relation de Chasles, φ est continue sur $]-\pi,\pi[$.

- De même f_β admet une dérivée partielle sur $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ continue sur ce domaine.

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\theta}(x,\theta) = -\frac{xie^{i\theta}\,x^{\beta-1}}{(1+xe^{i\theta})^2}.$$

(*) $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^{1-\alpha}}{1+u^\alpha} \times \alpha \times u^{\alpha-1}\,du = \alpha\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^\alpha} = \alpha\, u_1(\alpha)$

- $\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \theta}$ est continue sur $[\frac{1}{2}, 2] \times]-\pi, \pi[$, donc

$\theta \mapsto \int_{1/2}^{2} f_\beta(x,\theta)\,d\theta$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ de dérivée

$\theta \mapsto \int_{1/2}^{2} \dfrac{\partial f_\beta}{\partial \theta}(x,\theta)\,d\theta$.

- $\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \theta}$ est continue sur $]0, \frac{1}{2}] \times]-\pi, \pi[$ et

$\forall (x,\theta) \in]0, \frac{1}{2}] \times]-\pi, \pi[\quad \left|\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \theta}(x,\theta)\right| \leq \dfrac{x^{\beta-1}}{(1-x)^2}$ qui est intégrable.

Avec les hypothèses précédentes pour la continuité, on en déduit que

$\theta \mapsto \int^{1/2} f_\beta(x,\theta)\,dx$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$, de dérivée

$\theta \mapsto \int_0^{1/2} \dfrac{\partial}{\partial\theta} f_\beta(x,\theta)\,dx$.

- la majoration $\left|\dfrac{\partial f_\beta}{\partial \theta}(x,\theta)\right| \leq \dfrac{x^{\beta-1}}{(x-1)^2}$ sur $[2,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ permet

de prouver que $\theta \mapsto \int_2^{+\infty} f_\beta(x,\theta)\,d\theta$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\theta,\theta[$ de dérivée

$\theta \mapsto \int_2^{+\infty} f_\beta(x,\theta)\,d\theta$.

- En sommant une nouvelle fois, on en déduit que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ avec

$\varphi'(\theta) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f_\beta}{\partial \theta}(x,\theta)\,dx$.

IV.1.c) On a vu juste auparavant que $\varphi'(\theta) = \int_0^{+\infty} \dfrac{-xie^{i\theta}x^{\beta-1}}{(1+xe^{i\theta})^2}\,dx$

$$\varphi'(\theta) = -i\int_0^{+\infty} \frac{e^{i\theta}}{(1+xe^{i\theta})^2}x^\beta\,dx = \left[i\frac{x^\beta}{(1+xe^{i\theta})}\right]_0^{+\infty} - i\beta\int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{(1+xe^{i\theta})}\,dx.$$

le crochet est nul car $1>\beta>0$ $\quad \dfrac{x^\beta}{1+xe^{i\theta}} \underset{0}{\sim} x^\beta \quad \dfrac{x^\beta}{1+xe^{i\theta}} \underset{+\infty}{\sim} x^{\beta-1}e^{-i\theta}$

Donc

$$\varphi'(\theta) = -i\beta\,\varphi(\theta).$$

Par conséquent $\varphi(\theta) = \varphi(0)\,e^{-i\beta\theta}$

$\varphi(0) = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\beta-1}\,dx}{1+x} = \int_0^{+\infty} \dfrac{\alpha\,d\tau}{1+\tau^\alpha}$ en posant $x = \tau^\alpha$.

et Finalement $\boxed{\varphi(\theta) = \alpha\, u_1(\alpha)\, e^{-\frac{\theta}{\alpha}}}$

IV.2

On en déduit $\alpha\, u_1(\alpha) \sin(\beta \theta) = -\operatorname{Im} \varphi(\theta)$.

En écrivant $\dfrac{1}{1+xe^{i\theta}} = \dfrac{1+x\cos\theta - ix\sin\theta}{(1+x\cos\theta)^2 + x^2\sin^2\theta}$ on obtient directement le résultat demandé.

IV.3.a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta\, dx}{1+2x\cos\theta + x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta\, dx}{(x+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \left[\arctan \frac{x+\cos\theta}{\sin\theta}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta\, dx}{1+2x\cos\theta + x^2} = \theta}$.

IV.3.b) $\displaystyle L(\theta) = \int_0^1 \frac{(x^{-\beta}-1)\sin\theta\, d\theta}{1+2x\cos\theta + x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{(x^{-\beta}-1)\sin\theta\, d\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}$. On effectue le changement de variable $y = \frac{1}{x}$ dans la deuxième intégrale et on regroupe.

On obtient $\boxed{L(\theta) - \theta = \sin\theta\, M(\theta)}$.

IV.3c) Pour $\theta = \pi$ $\quad \dfrac{(1-x^\beta)^2}{x^\beta(1-x)^2} \underset{0}{\sim} x^{-\beta}$ et $\dfrac{(1-x^\beta)^2}{x^\beta(1-x)^2} \underset{1}{\sim} \beta^2$

Donc $\boxed{M(\pi) \text{ est bien définie.}}$

IV.3.d) $\displaystyle |L(\theta) - \theta| \leq |\sin\theta|\,|M(\theta)| \leq \sin\theta \int_0^1 \frac{(1-x^\beta)^2}{x^\beta(1-x)^2}\, dx$.

~~Or $(1-x^\beta) = \beta c^{\beta-1}(1-x)$ avec $c \in [x,1]$ donc $(1-x^\beta) \leq \beta(1-x)x^{\beta-1}$~~

~~et $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x^\beta)^2}{x^\beta(1-x)^2}\, dx \leq \beta^2 \int_0^1 x^{\beta-2}\, dx = \beta^2$~~

Soit $\theta_\beta(x) = \dfrac{1-x^\beta}{1-x}$ $\quad \theta'_\beta(x) = \dfrac{-\beta x^{\beta-1} + (\beta-1)x^\beta}{(1-x)^2} < 0$ donc $\theta_\beta(x) < \theta_\beta(0^+) = 1$

et $\boxed{\displaystyle |M(\theta)| \leq \int_0^1 \frac{1}{x^\beta} 1^2\, dx = \frac{1}{\beta-1}}$. L'inégalité en découle.

IV.3e) En faisant tendre θ vers π, on en déduit $\alpha\, u_1(\alpha) \sin\beta\pi = \pi$

Or $u_1(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)$. donc $\boxed{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta) = \dfrac{\pi}{\sin\beta\pi}}$.

IV.4) Il résulte directement de la formule obtenue en IV.3.e que

$$\boxed{u_1(p) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} = \frac{\pi}{p \sin\frac{\pi}{p}}}$$