Devoir en temps limité n°4

Sujet du concours MINES-PONTS, très légèrement modifié, pour être en conformité avec le nouveau programme

L'objet du problème est l'étude d'une suite définie par une intégrale pour en déduire des propriétés de la fonction Γ.
La lettre α désigne un réel strictement supérieur à 1 ($\alpha > 1$) ; pour simplifier certaines expressions la lettre β désigne $1/\alpha$ ($\beta = \frac{1}{\alpha}$). La lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 1 ; $n \geq 1$.
Soit $u_n(\alpha)$ le réel défini par la relation :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}.$$

Première partie : étude de la suite des réels $u_n(\alpha)$.

I.1) Convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$.

a) Vérifier que, pour tous les réels α et entiers n considérés, le réel $u_n(\alpha)$ est bien défini. Démontrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$ est convergente en étudiant sa monotonie.

b) En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, démontrer que, pour tout réel a compris strictement entre 0 et 1 ($0 < a < 1$) l'inégalité :

$$u_n(\alpha) \leq a + \frac{1}{(1+a^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1},$$

a lieu. En déduire la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\geq 1}$ lorsque n croît indéfiniment.

c) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de convergence dominée.

I.2) Etude de suites et de séries liées à $(u_n(\alpha))$.

a) Démontrer la relation ci-dessous liant $u_n(\alpha)$ et $u_{n+1}(\alpha)$:

$$(R) \qquad u_n(\alpha) = n\alpha(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)).$$

Donner une expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

b) Soit $U_n(\alpha)$ la somme des n premiers termes de la série de terme général $u_n(\alpha)$; déterminer $U_n(\alpha)$ en fonction du terme de la suite de rang $n+1$, $u_{n+1}(\alpha)$. Cette somme $U_n(\alpha)$ est définie par la relation

$$U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} u_k(\alpha).$$

En déduire l'expression de $U_n(\alpha)$ en fonction du premier terme $u_1(\alpha)$ de la suite.
Démontrer que la série de terme général $u_n(\alpha)$, $n \geq 1$ est divergente.

c) Soit $(v_n(\alpha))_{n\geq 1}$ la suite de terme général $v_n(\alpha) = \frac{u_n(\alpha)}{n}$.
Démontrer que la somme $V_n(\alpha)$ des n premiers termes de la série de terme général $v_n(\alpha)$, $n \geq 1$, s'exprime à l'aide des deux réels $u_1(\alpha)$ et $u_{n+1}(\alpha)$. Cette somme $V_n(\alpha)$ est définie par la relation :

$$V_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k(\alpha)}{k}.$$

En déduire que la série de terme général $v_n(\alpha)$, $n \geq 1$, est convergente et calculer sa somme en fonction de $u_1(\alpha)$.

I.3) Soit $(w_n(\alpha))_{n\geq 1}$ la suite des réels définis par la relation : $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \dfrac{\ln(n)}{\alpha}$.
Démontrer que la série de terme général $(w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha))$, $n \geq 1$, est convergente. En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que le réel $u_n(\alpha)$ soit équivalent à $\dfrac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Deuxième partie : fonction Γ ; limite du produit $n^{\frac{1}{\alpha}} u_n(\alpha)$.

Soit Γ la fonction définie par l'intégrale :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

II.1) Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction Γ ; établir, pour tout réel x de l'ensemble de définition, la relation : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Démontrer que cette fonction est continue sur $[1, +\infty[$; en déduire la continuité de Γ sur l'ensemble de définition.

II.2) Equivalent de $u_n(\alpha)$ lorsque l'entier n croît indéfiniment.

a) Soit $c_n(\alpha)$ le réel défini par la relation $c_n(\alpha) = \alpha n^{1/\alpha} u_n(\alpha)$. Etablir la relation :

$$\forall t \geq 0 \quad e^{-nt^\alpha} \leq \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}.$$

En déduire une minoration simple de $c_n(\alpha)$ à l'aide de $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

b) Soit ϵ un réel strictement compris entre 0 et 1. Démontrer qu'il existe un réel a strictement compris entre 0 et 1, tel que pour tout t de l'intervalle $[0, a]$, les deux inégalités :

$$t(1-\epsilon) \leq \ln(1+t), \qquad \frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \leq \exp\big(-n(1-\epsilon)t^\alpha\big),$$

aient lieu.

c) En déduire un majorant du réel $c_n(\alpha)$ qui s'exprime à l'aide du réel $v_n(\alpha, \epsilon)$ défini par la relation :

$$v_n(\alpha) = \int_0^a \exp\big(-n(1-\epsilon)t^\alpha\big)\, dt + \frac{1}{(1+a^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}.$$

Déterminer, pour ϵ fixé, la limite de $\alpha v_n(\alpha, \epsilon)$ lorsque n croît indéfiniment.

d) A partir des résultats précédents, déterminer la limite de la suite $(c_n(\alpha))_{n\geq 1}$, puis un infiniment petit équivalent à $u_n(\alpha)$.

II.3) En déduire la valeur du réel $K(\alpha)$ défini ci-dessus, au moyen de la fonction Γ.

Troisième partie : expression de $u_1(\alpha)$ en fonction de valeurs prises par la fonction Γ.

III.1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $u_n(\alpha)x^n$. Soit F la somme de cette série entière ; cette fonction est définie dans l'intervalle de convergence par la relation :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha)x^n.$$

Est-ce que la fonction F est définie pour $x = 1$? Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1-x)^{\beta-1}$ ($\beta = \frac{1}{\alpha}$). En déduire à l'aide de $u_1(\alpha)$ l'expression de $F(x)$ dans l'intervalle $]-R, R[$.

III.2) Soit la série entière de terme général $n^{-\beta}x^n$; ($\beta = 1/\alpha$). déterminer son rayon de convergence ; soit G la fonction somme de cette série ; $G(x)$ est définie par la relation :

$$G(x) = \sum_{n\geq 1} n^{-\beta}x^n.$$

Est-ce que G est définie pour $x = 1$?
Etablir que pour x strictement compris entre 0 et 1 ($0 < x < 1$), la fonction $t \mapsto t^{-\beta}x^t$ définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$, est décroissante ; en déduire, par comparaison avec une intégrale, un encadrement, pour tout entier n supérieur à 2, du terme $n^{-\beta}x^n$ et un infiniment grand équivalent à $G(x)$ lorsque x tend vers 1. On exprimera simplement cet équivalent en se servant d'une valeur de la fonction Γ.

III.3) Démontrer que, pour tout ϵ strictement positif et inférieur à 1 ($0 < \epsilon < 1$), il existe un entier N tel que, pour tout n supérieur ou égal à N, l'encadrement :

$$(1-\epsilon)\frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}} \leq u_n(\alpha) \leq (1+\epsilon)\frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}},$$

ait lieu. En déduire que le réel $F(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 1. Préciser, à l'aide de $G(x)$, un infiniment grand équivalent à $F(x)$.

III.4)

a) Utiliser les résultats précédents pour exprimer $u_1(\alpha)$ en fonction de valeurs prises par la fonction Γ.

b) Calculer $u_1(2)$; en déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$.

Quatrième partie : calcul de $u_1(\alpha)$.

Le réel β étant toujours égal à $\frac{1}{\alpha}$; soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\pi, \pi[$ par la relation :

$$\phi(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{1 + x\, e^{i\theta}} dx.$$

IV.1)

a) Vérifier que ϕ est bien définie dans l'intervalle ouvert $I =]-\pi, \pi[$. Exprimer la valeur $\phi(0)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

b) Montrer que ϕ est continue sur I.

c) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

d) Déduire des résultats précédents que ϕ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire l'expression de $\phi(\theta)$ en fonction de α, θ et $u_1(\alpha)$.

IV.2) Démontrer, à l'aide des résultats précédents, que l'expression $\alpha\, u_1(\alpha) \sin(\beta\theta)$ s'exprime à l'aide de l'intégrale $L(\theta)$ définie par la relation :

$$L(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\beta \sin\theta}{1 + 2x\cos\theta + x^2} dx.$$

IV.3) Le réel θ est supposé, dans cette question, compris strictement entre 0 et π, $0 < \theta < \pi$.

a) Calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{1 + 2x\cos\theta + x^2} dx.$$

b) Démontrer que l'expression $\alpha\, u_1(\alpha)\sin(\beta\theta) - \theta$ s'exprime à l'aide de l'intégrale $M(\theta)$ définie par la relation :

$$M(\theta) = \int_0^1 \frac{(1 - x^\beta)^2}{x^\beta(1 + 2x\cos\theta + x^2)} dx.$$

c) Démontrer que cette intégrale, qui est bien sûr définie lorsque θ appartient à l'intervalle I, est encore définie pour $\theta = \pi$.

d) Déduire des résultats précédents l'inégalité :

$$|\alpha\, u_1(\alpha)\sin(\beta\theta) - \theta| \leq \frac{\sin(\theta)}{1 - \beta}.$$

e) En déduire la valeur de $u_1(\alpha)$ et celle du produit $\Gamma(\beta)\Gamma(1 - \beta)$.

IV.4) Soit p un entier supérieur ou égal à 2 ; calculer à l'aide des résultats précédents l'intégrale :

$$K_p = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^p}.$$