ECOLE POLYTECHNIQUE OPTION M'

CONCOURS 1976

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

****

Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ celui des entiers ≥ 1, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^*$ celui des réels non nuls et $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels > 0.

I

I-1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tels que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on désigne par U_n l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continue et telle que, quel que soit $t \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$U_n(t) = u_n \frac{\sin^2 nt}{n^2 t^2}.$$

Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} U_n(t)$ converge.

Dans la suite, on désignera par S l'application $t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I-2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$R_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k(t).$$

Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, la série

$$\sum_{k\geq 1} |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right| dx$$

converge et que, quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$|R_n(t)| \leq |r_n| + \sum_{k=n}^{+\infty} |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \right| dx.$$

I-3) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$

I-4) Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2} \leq 2t + t^2$$

(on pourra, en désignant par n_0 le plus petit entier $\geq \dfrac{1}{t}$, majorer séparément $\displaystyle\sum_{n=1}^{n_0} \frac{\sin^2 nt}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2}$).

I-5) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels convergeant vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par V_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et telle que, quel que soit $t \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$V_n(t) = v_n \frac{\sin^2 nt}{n^2 t}.$$

Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} V_n(t)$ est convergente et que sa somme est continue sur $\mathbb{R}$.

II

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On désigne par E l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{R}$, par J l'intérieur de I (c'est-à-dire l'ensemble des points x de I tels qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $[x-\alpha, x+\alpha] \subset I$) et par E' l'espace vectoriel des applications de J dans $\mathbb{R}$. On suppose J non vide.

Pour $t \in E$, $x_0 \in J$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tels que l'on ait $[x_0 - h, x_0 + h] \subset J$, on pose

$$\Delta f(x_0, h) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)\right] .$$

Si, f et x_0 étant fixés, $\Delta(x_0, h)$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, on désignera cette limite par $f^{('')}(x_0)$ et on dira que $f^{('')}(x_0)$ est la *pseudo-dérivée seconde* de f au point x_0 (le symbole $f''(x_0)$ désignera la dérivée seconde au sens ordinaire, si elle existe).

II-1) Soit f un élément de E et x_0 un point de J tels que f admette une dérivée seconde au sens ordinaire sur un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans I, celle-ci étant continue en x_0. Montrer que f admet en x_0 une pseudo-dérivée seconde et que l'on a $f^{('')}(x_0) = f''(x_0)$.

II-2) Etant donné un point x_0 de J, trouver un élément f de E admettant en x_0 une pseudo-derivée seconde et n'admettant pas en ce point de dérivée seconde au sens ordinaire.

II-3) Soit f un élément de E et x_0 un point de J tel que f admette en x_0 une pseudo dérivée seconde. Etudier le signe de $f^{('')}(x_0)$ dans le cas où f admet n maximum en x_0 et dans le cas où f admet un minimum en x_0.

II-4) On désigne par E_1 le sous-ensemble de E constitué par les fonctions admettant une pseudo-dérivée seconde en tout point de J ; et, pour $f \in E_1$, on désigne par $f^{('')}$ l'application $x \mapsto f^{('')}(x)$.

Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application $f \mapsto f^{('')}$ de E_1 dans E' est linéaire.

Dans la suite cette application sera désignée par d.

II-5) On se propose de montrer que le noyau de d est constitué par les fonctions polynomiales de degré ≤ 1.

a) Vérifier que toute fonction polynomiale de degré ≤ 1 appartient au noyau de d.

b) Soit f un élément du noyau de d et soit a et b deux points de I tels que l'on ait $a < b$. Pour $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $i \in \{1, 2\}$, on désigne par $\phi_{\epsilon,i}$ l'application

$$x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + (-1)^i \epsilon(x - a)(b - x)$$

de I dans $\mathbb{R}$. Calculer la pseudo-dérivée seconde de $\phi_{\epsilon,i}$ sur J et, à l'aide de II-3), étudier le signe de $\phi_{\epsilon,i}$ sur $[a, b]$. Montrer alors que la restriction de f à $[a, b]$ est une fonction polynôme de degré ≤ 1.

En déduire que f elle-même est une fonction polynôme de degré ≤ 1.

II-6) Soit A un sous-ensemble fini et non vide de J ; on posera $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ la suite $(x_1, \ldots, x_n)$ étant strictement croissante. Soit f un élément de E admettant, en tout point de $J - A$, une pseudo-dérivée seconde nulle et tel que, quel que soit $i \in \{1, \ldots, m\}$, $h\Delta f(x_i, h)$ tende vers 0 quand h tend vers 0.

Montrer que f est encore une fonction polynôme de degré ≤ 1.

II-7) Soit f un élément de E_1 tel que $f^{('')}$ soit bornée sur J. Et soient respectivement m et M un minorant et un majorant de $f^{('')}$ sur J.

Montrer que, quels que soient $x_0 \in J$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tels que l'on ait $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$, on a :

$$m \leq \Delta f(x_0, h) \leq M$$

(pour cela on pourra former la fonction polynôme P, de degré ≤ 2, telle que l'on ait $P(x_0 - h) = f(x_0 - h)$, $P(x_0 + h) = f(x_0 + h)$ et $P(x_0) = f(x_0)$, puis calculer la pseudo-dérivée seconde de $f - P$ sur J et tenir compte de II-3).

III

Soit $(a_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels, bornées. x étant une variable réelle, on désigne par (Σ) la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ .$$

III-1) Montrer que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la série

$$\frac{a_0}{4}x^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge. F désignant l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associant à $x \in \mathbb{R}$ la somme de la série précédente, montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Expliciter a_n pour $n \in \mathbb{N}$ et b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$, à partir de F. Pour cela, on calculera $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III-2) Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$ tel que la série (Σ) converge en x_0. Montrer que F admet en x_0 une pseudo-dérivée seconde, que l'on explicitera.

III-3) Montrer que, si , en tout point de $[-\pi, \pi]$, la série (Σ) converge et a une somme nulle, a_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ et b_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III-4) On se propose d'établir un résultat plus fort que le précédent : étant donné un sous-ensemble fini et non vide de $]-\pi, \pi[$, si, en tout point de $[-\pi, \pi] - B$, la série (Σ) converge et a une somme nulle, a_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ et b_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela on pourra procéder comme suit :

Montrer d'abord que si les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0, alors, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $h\Delta f(x_0, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Etablir ensuite le résultat annoncé (on pourra utiliser la propriété suivante, dont la justification n'est pas demandée : quelle que soit la suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, il existe un point ξ de $]-\pi, \pi[-B$ tel que la suite $(\sin k_n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0).

III-5) Dans cette question, on suppose que la série (Σ) converge en tout point de $\mathbb{R}$. On désigne par g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associant à $x \in \mathbb{R}$ la somme de la série (Σ) en x. Et l'on suppose g continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, quel que soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que , pour tout x_0 de $\mathbb{R}$ et tout h de $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $h \leq \alpha$ on ait

$$|\Delta f(x_0, h) - g(x_0)| \leq \epsilon$$

(on pourra utiliser II-7).

En déduire que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f(x, h) - g(x)| \, dx$$

tend vers 0 quand h tend vers 0.

Montrer alors que l'on a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx \, dx \qquad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx \, dx \qquad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*,$$