

Troisième Partie

7

III.1) Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

f_n est continue et $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{M}{n^2}$
car $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
La somme est par conséquent définie et continue et sur $\mathbb{R}$.

En ajoutant $x \mapsto \frac{a_0}{4} x^2$ qui est continue on en déduit que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Notons $A_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et

$B_n = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

La série $\sum_{n \geq 1} f_n$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \cos px$ étant bornée sur $\mathbb{R}$ la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos px$$

converge uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$. On peut donc permuter intégration et sommation.

$$\forall p \geq 0 \quad A_p = \frac{a_0}{4} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos px \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \cos px) \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx \cos px) \, dx \right)$$

$$\text{Or} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos nx \, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } p=n=0 \\ \pi & \text{si } p=n > 0 \\ 0 & \text{si } p \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos px \sin nx \, dx = 0.$$

$$\text{Donc} \quad A_p = \frac{a_0}{4} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos px \, dx = \frac{a_p \pi}{p^2} \quad \text{si } p \geq 1$$

$$A_0 = \frac{a_0}{4} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx$$

$$\text{de même} \quad B_p = -\frac{b_p \pi}{p^2} + \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin px \, dx \quad \text{si } p \geq 1$$

Pour $p \geq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos px) x^2 dx = \left[\frac{1}{p} (\sin px) x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{p} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin px) x dx$$

$$= \frac{2}{p^2} \left[(\cos px) x \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{p^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos px dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos px) x^2 dx = \frac{4\pi(-1)^p}{p^2}$$

(8)

et $\forall p \geq 1 \quad \int_{-\pi}^{\pi} x^2 (\sin px) dx = 0$ car $x \mapsto x^2 \sin px$ est impaire.

Finalement

$$A_0 = \frac{\pi^3}{6} a_0 \quad \forall p \geq 1 \quad A_p = \frac{4\pi(-1)^p}{p^2} a_0 + \frac{a_p \pi}{p^2} \quad B_p = -\frac{b_p \pi}{p^2}$$

puisque

$$a_0 = \frac{6}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx \quad \forall p \geq 1 \quad a_p = -\frac{p^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos px dx + \frac{24(-1)^p}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx$$

$$b_p = -\frac{p^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos px dx$$

III 2) $\Delta F(x_0, h) = \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{a_n}{h^2} (\cos n(x_0+h) + \cos n(x_0-h) - 2 \cos nx_0) \right.$
 $\left. + \frac{b_n}{h^2} (\sin n(x_0+h) + \sin n(x_0-h) - 2 \sin nx_0) \right)$

Or $\cos n(x_0+h) + \cos n(x_0-h) = 2(\cos nx_0)(\cos nh)$
 $\sin n(x_0+h) + \sin n(x_0-h) = 2 \sin nx_0 (\sin h)$

et finalement en utilisant $\cos h - 1 = -2 \sin^2 \frac{h}{2}$

$$\Delta F(x_0, h) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \frac{4 \sin^2 n \frac{h}{2}}{n^2 h^2}$$

On retrouve exactement la situation et les hypothèses de la première partie avec $u_n = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0$ et $t = \frac{h}{2}$.

La fonction S associée est continue en 0 et par conséquent

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta F(x_0, h) = F''(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0$$

III 3) On en déduit que si (Σ) converge et a une somme nulle sur $\mathbb{R}$, alors F'' est nulle sur $\mathbb{R}$. D'après les résultats de la deuxième partie F est donc une fonction polynomiale de degré au plus 1.

(9)

Or $\mathbb{R} \mapsto F(x) - \frac{a_0}{4} x^2$ est continue et 2π -périodique donc bornée. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} (F(x) - \frac{a_0}{4} x^2) = 0$. Or

on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} F(x) = 0$ car $\deg F \leq 1$, donc

finalement $a_0 = 0$ et F est une fonction polynomiale bornée donc constante. Or en déduisant $\forall p \geq 1 \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos px dx = 0$ et $\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin px dx = 0$ ($= F(c) \int_{-\pi}^{\pi} \sin px dx$ par exemple)

les formules obtenues en III.1) donnent alors $\forall p \geq 1 \ a_p = b_p = 0$

III.4) Montrons tout d'abord que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

tendent vers 0. Soit $B_1 = B \cup -B = B \cup \{-x, x \in B\}$. B_1 est fini et $\forall x \in]-\pi, \pi[- B_1 \quad \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ et $\frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$.

Or en déduisant

$$\forall x \in]-\pi, \pi[- B_1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \sin nx = 0.$$

Or si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, il en existe une suite extraite $(b_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \quad |b_{k_n}| \geq \varepsilon$.

Or en déduisant $\forall x \in]-\pi, \pi[- B_1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin k_n x = 0$

ce qui contredit le lemme qu'on nous demande d'admettre.

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Le résultat pour la suite a_n se démontre de la même manière.

Car en appliquant le résultat admis à la suite $2b_n$ on obtient qu'il existe ε tel que $(2 \cos k_n \varepsilon \sin k_n \varepsilon)_{n \geq 0}$ ne tende pas vers 0, ce qui implique que $(\cos k_n \varepsilon)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers 0.

Rq) D'après Émile Picard lorsque Bernhard Riemann a démontré le théorème que nous sommes en train de démontrer il a considéré comme évident que si $(\cos nx)_{n \geq 1}$ tendait vers 0 pour tout x alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendrait vers 0.

La démonstration du résultat qu'on nous demande d'admettre est loin d'être évidente. (10)

Pour conclure on applique le résultat de la question I.5) en effectuant le même calcul qu'en III.2) (cette fois-ci $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ tend vers 0). Sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}[$ on va trouver $F^{(n)} = 0$ comme dans la question précédente. En les x_i on aura $\lim_{h \rightarrow 0} h \Delta f(x_i, h) = 0$ en utilisant I.5). Le résultat de la question II.6) montre alors que F est une fonction polynomiale de degré au plus 1. On termine alors comme dans la question précédente.

III.5) g est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodique elle est donc uniformément continue.
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x - y| \leq 2\alpha \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$

Soit σ une subdivision de $[-\pi, \pi]$ de pas inférieur à α . $\sigma = (a_0, \dots, a_p)$ avec $a_{p-1} = a_p - 2\pi$ $a_{p+1} = a_1 + 2\pi$. Soit $y_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$ $0 \leq i \leq p-1$.

$\forall x \in [a_{i-1}, a_{i+2}] \quad g(y_i) - \frac{\varepsilon}{2} \leq g(x) \leq g(y_i) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$ (car $|y_i - x| \leq 2\alpha$)

$\forall h \in \mathbb{R}^+ \quad h \leq \alpha \quad \forall x_0 \in [-\pi, \pi] \quad \exists i \quad x_0 \in [a_i, a_{i+1}] \quad [x_0 - h, x_0 + h] \subset [a_{i-1}, a_{i+2}]$

Or $g = F^{(n)}$ donc d'après II.7 appliqué avec $I = [a_{i-1}, a_{i+2}]$ $m = g(y_i) - \frac{\varepsilon}{2}$ $n = g(y_i) + \frac{\varepsilon}{2}$
 On aura $\forall x_0 \in [-\pi, \pi] \quad \exists i \quad x_0 \in [a_i, a_{i+1}]$ et $g(y_i) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \Delta f(x_0, h) \leq g(y_i) + \frac{\varepsilon}{2}$ si $h \leq \alpha$.

Or $|x_0 - y_i| \leq \alpha \leq 2\alpha$ donc $g(y_i) - \frac{\varepsilon}{2} \leq g(x_0) \leq g(y_i) + \frac{\varepsilon}{2}$. Finalement
 $\forall x_0 \in [-\pi, \pi] \quad \forall h \in \mathbb{R}^+ \quad h \leq \alpha \quad g(x_0) - \varepsilon \leq \Delta f(x_0, h) \leq g(x_0) + \varepsilon$, ce qui est le résultat demandé.

On en déduit $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^+ \quad h \leq \alpha \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f(x, h) - g(x)| dx \leq 2\pi \varepsilon$.

Ce qui veut exactement dire $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta f(x, h) - g(x)| dx = 0$.

Or pour tout p de $\mathbb{N}$

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos px \, dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta f(x, h) \cos px \, dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - \Delta f(x, h)| \cos px \, dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - \Delta f(x, h)| \, dx$$

$$\text{On en déduit} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos px \, dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta f(x, h) \cos px \, dx$$

On l'intègre dans le membre de droite pour se calculer en permutant intégrale et sommation. Des calculs déjà faits conduisent à $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos px \, dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4a_p \sin^2 \frac{h}{2}}{p^2 h^2}$

$$\text{c'est à dire} \quad a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos px \, dx$$

$$\text{de même} \quad b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin px \, dx \quad \text{si } p \geq 1.$$