ENS 2017 Mathématiques D (U)

Question préliminaire

Il suffit de montrer que si $f : I \to I$ et $g : I \to I$ sont monotones par morceaux alors $g \circ f$ l'est aussi.

Il existe un ensemble fini $\mathcal{C}_f$ tel que f soit strictement monotone sur chaque intervalle contenu dans $I - \mathcal{C}_f$ (et on peut définir $\mathcal{C}_g$ de même).

Soit J une composante connexe de $I - \mathcal{C}_f$. f est strictement monotone sur J donc injective, $f_{|J}^{-1}(\mathcal{C}_g)$ est donc fini. Si on note $\mathcal{C}_{J,f,g}$ cet ensemble, ~~pour~~ sur tout intervalle contenu dans $J - \mathcal{C}_{J,f,g}$ $g \circ f_{|J}$ est la composée de deux fonctions strictement monotone elle est donc strictement monotone.

Finalement $g \circ f$ est strictement monotone sur tout intervalle contenu dans $I - \bigcup_{J \text{ composante connexe de } I - \mathcal{C}_f} \mathcal{C}_{J,f,g}$.

En fait ce raisonnement prouve même que $\lambda(g \circ f) \leq \lambda(g)\lambda(f)$.

I se décompose en $\lambda(f)$ intervalles J sur lesquels f est strictement monotone et chaque J se décompose en au plus $\lambda(g)$ intervalles sur lesquels $g \circ f$ est strictement monotone.

Partie I

I.1) $x_{n+1} = x_n^2$. Par récurrence $x_n = x_0^{2^n}$.

Donc $K_0 = [-1, 1]$. $\begin{cases} \text{Si } |x_0| > 1 & \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \\ \text{Si } |x_0| = 1 & \lim_{n\to+\infty} x_n = 1 \\ \text{Si } |x_0| < 1 & \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \end{cases}$

I.2) x est un point fixe de f_c ssi $x^2 + c = x$, soit $x^2 - x + c = 0$

On en déduit. Si $\begin{cases} 1-4c < 0 & \text{pas de point fixe} \\ 1-4c = 0 & \text{un unique point fixe } x = \frac{1}{2} \\ 1-4c > 0 & \text{deux points fixes } x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} \end{cases}$

I.3) Si $1-4c < 0$ alors $x \mapsto x^2 - x + c$ ne s'annule pas donc.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 - x + c > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x_0$. $x_{n+1} > x_n$.

La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est croissante, elle converge dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc si $\lim_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ on a $l = f(l)$

Or un tel l n'existe pas, donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $K_c = \emptyset$.

I.4) On montre comme en I.3) que, s'il existe un n_0 tel que $x_{n_0} > \beta_c$ alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (car $]\beta_c, +\infty[$ est stable par f, $f(x) > x$ sur cet intervalle).

En particulier $K_c \subset [-\beta_c, \beta_c]$. (car $x_0 < -\beta_c \Rightarrow x_1 > \beta_c$)

$f([-\beta_c, \beta_c]) = [c, \beta_c]$

Or $-\beta_c \leq c \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2} \geq -c$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-4c} \geq -(2c+1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c+1 \geq 0 \\ \text{ou} \\ 1-4c \geq (1+2c)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c \geq -\frac{1}{2} \\ 1-4c \geq 1+4c+4c^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c \geq -\frac{1}{2} \\ c(c+2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq -\frac{1}{2} \\ -2 \leq c \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq c$.

Donc si $c \in [-2, \frac{1}{4}]$, $[-\beta_c, \beta_c]$ est stable par f, donc $[-\beta_c, \beta_c] \subset K_c$.

et par conséquent $K_c = [-\beta_c, \beta_c]$

I.5.a) - Si $x_0 \in K' = \bigcap_{n\geq 0} f_c^{-n}([-\beta_c, \beta_c])$ alors $\forall n \in \mathbb{R}$ $x_n \in [-\beta_c, \beta_c]$ donc $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée et $x_0 \in K_c$. Donc $K' \subset K_c$ ~~$K_c \subset K'$~~

Si il existe n tel que $x_n \notin [-\beta_c, \beta_c]$ $(x_0 \notin K')$ alors $x_{n+1} \in]\beta_c, +\infty[$ et d'après une remarque précédente $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et $x_0 \notin K_c$, donc $K_c \subset K'$, et finalement $K' = K_c$.

- f_c^n est continue donc $f_c^{-n}([-\beta_c, \beta_c])$ est fermé. K_c est fermé comme intersection de fermés, de plus $K_c \subset f^{-0}([-\beta_c, \beta_c]) = [-\beta_c, \beta_c]$ donc K_c est aussi borné. K_c est compact.

I.5.b). Si f_c n'est pas strictement monotone sur (a_n, b_n) alors $c \in]a_n, b_n[$ (*) (l'intervalle ouvert d'extrémités a_n et b_n).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe x_0 tel que $\in [a, b]$ $x_n = f^n(x_0) = c$. Alors $x_{n+1} < -\beta_c$ (et $x_{n+2} > \beta_c$) donc $x_0 \notin K_c$. Contradiction. (*) Car il existe alors $d \in]a_n, b_n[$ $f'(d) = 0$ et nécessairement $d = c$.

I.5.c) On vient de remarquer que c n'appartient pas à (a_n, b_n) donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}}$ est continue sur le segment $[a_n, b_n]$ pour tout n. et L_n est bien définie.

Puisque f_c est strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ on peut faire le changement de variable $x = f_c(y)$ dans L_{n+1}.

$$L_{n+1} = \left| \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} \right| = \left| \int_{f(a_n)}^{f(b_n)} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} \right|$$

$$L_{n+1} = \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{f'(y)\, dy}{\sqrt{1 - \frac{f(y)^2}{c^2}}} \right|$$

$$L_{n+1} = \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{2y\,dy}{\sqrt{1 - \frac{(y^2+c)^2}{c^2}}} \right| = \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{2y\,dy}{\sqrt{-\frac{2}{c}y^2 - \frac{y^4}{c^2}}} \right|$$

$$L_{n+1} = \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{2y\,dy}{|y|\sqrt{-\frac{2}{c} - \frac{y^2}{c^2}}} \right| = 2 \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{dy}{\sqrt{-\frac{2}{c} - \frac{y^2}{c^2}}} \right|$$

Or $\quad -\frac{2}{c} > 1 \quad$ donc $\quad \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{dy}{\sqrt{-\frac{2}{c} - \frac{y^2}{c^2}}} \right| \geqslant \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}}} \right| = L_n$

$$\left(Rq. \quad \left| \int_{a_n}^{b_n} \frac{dy}{\sqrt{-\frac{2}{c} - \frac{y^2}{c^2}}} \right| = \int_{\min(a_n,b_n)}^{\max(a_n,b_n)} \frac{dy}{\sqrt{-\frac{2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2}}} \geqslant \int_{\min(a_n,b_n)}^{\max(a_n,b_n)} \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{c^2}}} \geqslant \left| \cdots \right| \right)$$

On a donc $\quad L_{n+1} \geqslant 2 L_n$, puis par récurrence

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2\beta_c \geqslant \underline{L_n \geqslant 2^n L_0 = 2^n (b-a)}$

donc $\underline{b = a}$ et K_c ne contient pas d'intervalle non réduit à un point.

$\underline{\text{PS}}$ $\quad L_n \leq 2\beta_c \quad$ car $\quad (a_n, b_n) \subset K_c$. En effet si $x_0 \in (a_n, b_n)$ alors $x_n \in [a, b] \subset K_c$ et $(x_m)_{m \geqslant 0}$ est donc bornée.