Concours Mines-Ponts 2011 Filière MP

Première composition de Mathématiques

A Décomposition de Dunford

1) D'après le théorème de Cayley-Hamilton $P(f) = 0$,
donc $\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker} P(f) = \operatorname{Ker} \prod_{i=1}^{r} P_i(f)$

Or les P_i sont deux à deux premiers entre eux car les λ_i sont distincts.

Le théorème de décomposition des noyaux permet d'affirmer :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

2) Puisque f et $P_i(f)$ commutent F_i est stable par f (ce que l'énoncé a l'air de considérer comme acquis). f_i est l'endomorphisme induit par f sur F_i donc $P_i(f_i) = P_i(f)_{|F_i} = 0$

Et P_i est bien un polynôme annulateur de f_i

Les valeurs propres de f_i sont donc racines de P_i et par conséquent $Sp(f_i) \subset \{\lambda_i\}$

Or le corps de base est $\mathbb{C}$ donc le polynôme caractéristique de f_i, que nous notons Q_i, est scindé et donc de la forme $(X-\lambda_i)^{\dim F_i} = Q_i = \chi_{f_i}$

Puisque $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ et que chaque F_i est stable par f

on aura $P = \prod_{i=1}^{r} Q_i = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i} \left(= \prod_{i=1}^{r} P_i\right)$

L'unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ donne $\forall i \; \alpha_i = \dim F_i$

En particulier $\forall i \quad Q_i = P_i$ qui est bien le polynôme caractéristique de f_i

3) Soit $\mathcal{B}$ une base ~~de~~ adaptée à la décomposition $\mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, alors la matrice A' de f dans cette base est diagonale par blocs $A' = \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix}$

où M_i est la matrice de f_i dans la base $\mathcal{B}_i$ de F_i extraite de $\mathcal{B}$.

Puisque $(f_i - \lambda_i Id_{F_i})^{\alpha_i} = 0$, en passant aux matrices on aura $(M_i - \lambda_i I_{\alpha_i})^{\alpha_i} = 0$ donc

$M_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ où N_i est nilpotente.

Si $\mathcal{C}$ est la base canonique et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ (et non pas de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$) alors

$A' = P A P^{-1}$ et le résultat est prouvé.

4) On pose $D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix}$ $N' = \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_r \end{pmatrix}$

D' est diagonale, N' nilpotente ($N'^{\max(\alpha_i)} = 0$), et $N'D' = D'N'$ en faisant le produit par blocs.

Posons $D = P^{-1} D' P$ et $N = P^{-1} N' P$.

L'application $M \mapsto P^{-1} M P$ étant un automorphisme d'algèbre on aura $A = D + N$, $DN = ND$ et $N^{\max(\alpha_i)} = 0$

De plus D est semblable à une matrice diagonale donc diagonalisable, et N nilpotente.

5) Application numérique.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4 = (X-1)(X-2)^2$$

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker}(A - I_3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{C}V_1$$

$$(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}V_2$$

On remarque qu'il est de dimension seulement 1. A n'est donc pas diago-nalisable.

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On complète (V_2) en une base de $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)^2$ en choisissant $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V_3 + V_2 .$$

La matrice de f dans la base (V_1, V_2, V_3) est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si P est la matrice de passage de (V_1, V_2, V_3) à la base canonique on a.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ puis } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la décomposition de Dunford est

$A = D + N$ avec

$$D = P^{-1} D' P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$N = P^{-1} N' P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B. Commutation et conjugaison.

6) $(\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P)(X) = P^{-1}(APXP^{-1} - PXP^{-1}A)P$

$= P^{-1}APX - XP^{-1}AP$

Donc $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{P^{-1}AP} = \mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{P^{-1}}(A)}$

7) $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ \ , \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{i,i}$.

On rappelle $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

On a donc $A E_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}$ $E_{i,j} A = \lambda_j E_{i,j}$

donc $\mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j}$.

$E_{i,j}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$

Puisque $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$

comm_A est donc diagonalisable et $Sp(\mathrm{comm}_A) = \{\lambda_i - \lambda_j, 1 \leq i,j \leq n\}$

8) Si A est diagonalisable $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale, donc $\mathrm{comm}_A = \mathrm{conj}_P \circ \mathrm{comm}_D \circ \mathrm{conj}_{P^{-1}}$

Or conj_P est un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$, d'inverse $\mathrm{conj}_{P^{-1}}$.

Donc $(\mathrm{conj}_P(E_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$

et $\mathrm{comm}_A(\mathrm{conj}_P(E_{i,j})) = \mathrm{conj}_P \circ \mathrm{comm}_D(E_{i,j})$

$= \mathrm{conj}_P((\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j})$

$\mathrm{comm}_A(\mathrm{conj}_P(E_{i,j})) = (\lambda_i - \lambda_j)\, \mathrm{conj}_P(E_{i,j})$

Donc $(\mathrm{conj}_P(E_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base formée de vecteurs propres de comm_A qui est donc diagonalisable.

9) On suppose A nilpotente.

- Calculons $comm_A^2(X) = A(AX - XA) - (AX - XA)A$

$$comm_A^2(X) = A^2X - 2AXA + XA^2$$

quitte à ~~calculer~~ calculer $comm_A^3(X) = A^3X - 3A^2XA + 3AXA^2 - XA^3$.

On peut pressentir le résultat

$$\forall p \quad comm_A^p(X) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k A^{p-k} X A^k \qquad (1)$$

cette formule peut se démontrer par récurrence, comme la formule du binôme ou la formule de Leibniz.

On peut aussi introduire les deux endomorphisme s et δ de $M_n(\mathbb{C})$ définis par $s(X) = AX \quad \delta(X) = XA$.

On a $s \circ \delta = \delta \circ s = X \mapsto AXA$. et $comm_A = s - \delta$.

Puisque s et δ commutent on peut appliquer la formule du binôme et

$$comm_A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k s^{p-k} \delta^k \qquad (2)$$

ce qui donne (1) en appliquant à X.

- Supposons A nilpotente. Il existe $q \geq 1$ tel que $A^q = 0$

posons $p = 2q - 1$ alors $\forall k \in [0, p] \quad k \geq q$ ou $p - k \geq q$

donc $\forall k \in [0, p] \quad A^{p-k} = 0$ ou $A^k = 0$ et

par conséquent $comm_A^p = 0$ et $comm_A$ est nilpotent.

10) Si $comm_A = 0$ alors $\forall X \in M_n(\mathbb{C}) \quad AX = XA$.

donc $A = \mu I_n$ pour un μ dans $\mathbb{C}$.

Or $\exists p \quad A^p = 0$ donc $\exists p \quad \mu^p = 0$ et $\mu = 0$

et par conséquent $A = 0$.

suite de la question ↪

Le rapport du concours dit bien qu'il fallait démontrer que si A vérifiait $\mathrm{comm}_A = 0$ alors A était une matrice scalaire, c'est-à-dire une matrice de la forme λI_n (à ne pas confondre avec une matrice diagonale).

Soit A tel que $\mathrm{comm}_A = 0$ alors $\forall i,j \quad \mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = 0$

Ecrivons $A = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l}$ alors.

Soit $(i,j) \in [1,n]^2$

$$\underline{\mathrm{comm}\, A\,(E_{i,j})} = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} - \sum_{k,l} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l}$$

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j} - \sum_{l=1}^{n} a_{j,l} E_{i,l}.$$

$$0 = \underline{(a_{i,i} - a_{j,j}) E_{i,j}} + \underline{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{k,i} E_{k,j}} - \underline{\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} a_{j,l} E_{i,l}}$$

Dans cet écriture jamais deux couples d'indices (i,j), (k,j) $k\neq i$, (i,l) $l\neq j$ ne sont égaux et $(E_{k,l})$ est une base. Donc :

$a_{i,i} = a_{j,j}$ et $\forall\, k \neq i \quad a_{k,i} = 0 \qquad \forall\, l \neq i \quad a_{j,l} = 0$

Donc $\underline{A = a_{1,1} I_n.}$ q.e.d

11) Par linéarité $\underline{\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_D + \mathrm{comm}_N}$ si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A. D'après 8) $\underline{\mathrm{comm}_D \text{ est diagonalisable}}$. D'après 9) $\underline{\mathrm{comm}_N}$ est ~~diagonalisable~~ nilpotent

On vérifie $\mathrm{comm}_N \circ \mathrm{comm}_D(X) = N(DX - XD) - (DX - XD)N$

$= NDX - NXD - DXN + XDN$

$= DNX - DXN - NXD + XND$

$$\underline{\mathrm{comm}_N \circ \mathrm{comm}_D(X) = \mathrm{comm}_N \circ \mathrm{comm}_D(X)}$$

$\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_D + \mathrm{comm}_N$ est donc la décomposition de Dunford de comm_A.

On en déduit que $\underline{\mathrm{comm}_A \text{ est diagonalisable}}$ si et seulement si $\underline{\mathrm{comm}_N = 0}$, ce qui d'après 10) $\underline{\text{équivaut à } N = 0}$, ce qui équivaut à $\underline{A \text{ diagonalisable.}}$

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe.

12) Supposons u diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \quad, \lambda_n)$. On a alors

$\dim \mathrm{Ker}\, u = n - \mathrm{rg}(u) = \mathrm{card}\{i, \lambda_i = 0\}$.

Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^2) = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \quad, \lambda_n^2)$ et $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

donc $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim \mathrm{Ker}\, u^2$.

Or $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u^2$ donc $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$

et $i) \Rightarrow ii)$

. Supposons $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ et soit x dans $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u$
alors il existe y tel que $x = u(y)$ et $u(x) = 0$.
Donc $u^2(y) = 0$, $y \in \mathrm{Ker}\, u^2 = \mathrm{Ker}\, u$, donc $x = u(y) = 0$ et
$\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Soit $ii \Rightarrow iii)$

13) Soit $(\alpha_1, \quad, \alpha_q) \in \mathbb{C}^q$ tel que $\alpha_1 \varphi_1 + \quad + \alpha_q \varphi_q = 0$

Alors $\forall x \in E$ $\quad \alpha_1 \varphi_1(x) + \quad + \alpha_q \varphi_q(x) = 0$

$\alpha_1 b(\varepsilon_1, x) + \quad + \alpha_q b(\varepsilon_q, x) = 0$

$\forall x \in E \quad b\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_i, x\right) = 0$

Or b est non dégénérée, donc $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_i = 0$

Or $(\varepsilon_1, \quad, \varepsilon_q)$ est libre, donc $\forall i \; \alpha_i = 0$. (φ_i) est libre

14) Soit $x \in F^{\perp b}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. $\forall j \in [1, p] \; b(\varepsilon_j, x) = 0$ car $\varepsilon_j \in F$

$x \in F^{\perp b} \Rightarrow \forall j \in [1, q] \quad 0 = x_j$.

$x \in F^{\perp b} \Rightarrow x \in \mathrm{Vect}\{e_{q+1}, \quad, e_p\}$.

La réciproque est claire, par linéarité.

Donc $F^{\perp b} = \mathrm{Vect}\{e_{q+1}, \quad, e_p\}$ et $\dim F^{\perp b} = p - q$.

On en déduit $\dim F + \dim F^{\perp b} = p \quad (= q + p - q)$.

D. Critère de Klarès.

15) - <u>la bilinéarité</u> de φ résulte de la bilinéarité du produit matriciel et de la linéarité de la trace.

- $\forall (X,Y) \in M_n(\mathbb{C})^2 \quad tr(XY) = tr(YX)$ donc φ est <u>symétrique</u>.

- Soit X dans $M_n(\mathbb{C})$, $X = \sum_{k,l} x_{k,l} E_{k,l}$, tel que

$\forall Y \in M_n(\mathbb{C}) \quad \varphi(X,Y) = 0 = tr(XY)$, alors

$\underline{\forall i,j \quad tr(X E_{i,j}) = 0} = tr\left(\sum_{k=1}^{n} x_{k,i} E_{k,j}\right) \underline{= x_{j,i}}$

$\forall i,j \quad x_{j,i} = 0$

Donc $X = 0$

et <u>φ est non dégénérée.</u>

16) + Soit X dans $\ker(comm_A)$ et Y dans $\mathrm{Im}(comm_A)$

On a $AX = XA$ et $Y = AZ - ZA$.

$\varphi(X,Y) = tr(XY) = tr(XAZ - XZA)$

$= tr(A(XZ)) - tr((XZ)A)$ car $\underline{XA = AX}$

$\varphi(X,Y) = 0 \quad \underline{(tr(MN) = tr(NM))}$

On a donc $\underline{\mathrm{Im}(comm_A) \subset (\ker comm_A)^{\perp_B}}$.

Or d'après la question 14).

$\underline{\dim(\ker comm_A)^{\perp_B} = \mathrm{codim}(\ker comm_A) = \dim \mathrm{Im}\, comm_A}$

et finalement $\underline{(\ker comm_A)^{\perp_B} = \mathrm{Im}\, comm_A}$.

17) Il suffit de montrer que si A est nilpotente alors

A appartient à $(\ker(comm_A))^{\perp_B} = \mathrm{Im}\, comm_A$.

Il existera alors une matrice X telle que $A = comm_A(X)$

↪ suite de la question.

Soit Y dans $\ker(\mathrm{comm}\,A)$. On a $AY = YA$.

Donc $\forall k \quad (AY)^k = A^k Y^k$ (On démontre d'abord par récurrence $A^k Y = Y A^k$, puis on en déduit en permutant les rôles de Y et A^k ($A \leftarrow Y, Y \leftarrow A^k$) que $A^k Y^k = Y^k A^k$. On peut surtout affirmer le résultat sans justification).

Or il existe p tel que $A^p = 0$. On en deduit $(AY)^p = 0$, donc AY est nilpotente.

les seules valeurs propres de AY sont donc nulles, or le corps est $\mathbb{C}$ donc son polynôme caractéristique est scindé et $\mathrm{tr}(AY) = \sum_{\lambda \in Sp(AY)} m_\lambda \lambda = 0$.

c'est-à-dire $\varphi(A, Y) = 0$.

$\forall Y \in \ker(\mathrm{comm}_A) \quad \varphi(A, Y) = 0$ donc $A \in (\ker \mathrm{comm}\,A)^{\perp_R}$

q.e.d.

Un calcul immédiat donne $\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n} = \mathrm{comm}_A$.

18) On va procéder en raisonnant par blocs. On a vu dans la partie A que A peut s'écrire

$$A = P \begin{pmatrix} M_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_r \end{pmatrix} P^{-1}$$ où

$M_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$

Pour tout i N_i est nilpotente, il existe donc X_i tel que.

$N_i = \mathrm{comm}_{N_i}(X_i) = \mathrm{comm}_{\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i}(X_i) = \mathrm{comm}_{M_i}(X_i)$

Posons $X' = \begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_r \end{pmatrix}$ alors un produit

par blocs donne $\underline{N' = \mathrm{comm}_{A'}(X')}$

Un calcul déjà effectué (question 6) donne

$$\underline{N = \mathrm{comm}_A(PX'P^{-1}) = \mathrm{comm}_A(X)}.$$

<u>19)</u> A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

<u>D'après 12), si comm_A est diagonalisable</u> alors

$\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A) = \mathrm{Ker}((\mathrm{comm}_A)^2)$

<u>Réciproquement</u>, supposons $\mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)^2$.

Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A

$N = \mathrm{comm}_A(X)$ d'après la question précédente.

Or $\mathrm{comm}_A(N) = 0$ car A et N commute.

donc $(\mathrm{comm}_A)^2(X) = 0$

donc $\mathrm{comm}_A(X) = 0$ $\quad (\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)^2 = \mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A)$

donc $N = 0$

et par conséquent <u>A est diagonalisable</u>.

<u>FIN DU PROBLÈME</u>

<u>ORIGINAL</u>

questions supplémentaires →

E. les bases duales et antéduale

19) ~~Les~~ ~~don~~née des images des éléments d'une base détermine une et une seule application linéaire. Chaque φ_i est déterminée de manière unique. Donc $(\varphi_1, \quad, \varphi_n)$ est unique.

20) Supposons $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0$ alors $\forall j \quad 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(e_j) = \alpha_j$

La famille $(\varphi_1, \quad, \varphi_n)$ est donc libre.

21) Soit φ dans E^*, posons $\psi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\varphi_i \in E^*$, alors

$\forall j \quad \psi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\varphi_i(e_j) = \varphi(e_j)$.

φ et ψ sont linéaires et égales sur une base donc $\varphi = \psi$ et $\varphi \in \text{Vect}\{\varphi_1 \quad, \varphi_n\}$. $(\varphi_1, \quad \varphi_n)$ est génératrice.

$(\varphi_1, \quad, \varphi_n)$ est libre et génératrice, c'est une base de E^*

22) $x \neq 0$ donc (x) est libre. On la complète en une base $(e_1 = x, e_2, \quad, e_n)$ de E. La forme linéaire φ_1 des questions précédentes vérifie $\varphi_1(x) = 1$

{ Par contraposée si $\forall \varphi \quad \varphi(y) = 0$ alors $y = 0$.

23) + Φ est clairement linéaire. Si $x \in \text{Ker}\,\Phi \quad \forall i \quad \varphi_i(x) = 0$

Or $\forall \varphi \in E^* \quad \varphi = \sum \alpha_i \varphi_i$ donc $\forall \varphi \in E^* \quad \varphi(x) = 0$ donc $x = 0$

+ Φ est linéaire, $\text{Ker}\,\Phi = \{0\}$, $\dim E^* = n = \dim K^n$

Donc Φ est un isomorphisme.

24) Soit $(\varepsilon_1, \quad, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Prenons $e_i = \Phi^{-1}(\varepsilon_i)$, alors $(e_1, \quad, e_n)$ est une base de E et $\forall i$ ~~j~~ $\Phi(e_i) = (\varphi_1(e_i), \quad \varphi_j(e_i), \quad, \varphi_n(e_i)) = \varepsilon_i$

Donc $\forall i, j \quad \varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$

F. Unicité de la décomposition de Dunford.

~~25~~25) d et f commutent donc d et $(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ aussi donc.

$F_i = \ker(f-\lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ est stable par d. (et de même par n).

26) L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. Donc d_i est diagonalisable. Si B_i est une base de F_i dans laquelle la matrice de d_i est diagonale la matrice dans B_i de $d_i - \lambda_i Id_{F_i}$ est aussi diagonale.

Donc $d_i - \lambda_i Id_{F_i}$ est diagonalisable.

D'autre part $d_i + n_i = f_i$ et puisque F_i est stable par tous ces endomorphisme n_i et f_i commutent. (comme n et f).

$d_i - \lambda_i Id_{F_i} = f_i - \lambda_i Id_{F_i} - n_i = n'_i - n_i$

n'_i et n_i sont des endomorphismes nilpotents qui commutent. Donc $(n'_i - n_i)$ est nilpotent (comme en 9)

$d_i - \lambda_i Id_{F_i}$ est donc diagonalisable et nilpotent.

27) les ~~seules~~ valeurs propres de $d_i - \lambda_i Id_{F_i}$ sont donc nulles et par conséquent $d_i - \lambda_i Id_{F_i} = 0$ puisqu'il est diagonalisable.

$\forall i \quad d_i = \lambda_i Id_{F_i}$ est uniquement déterminé

Or d est déterminé par ses restrictions aux F_i car $\mathbb{C}^n = \oplus F_i$ donc d est unique, et par soustraction n est unique. La décomposition de Dunford est unique.