PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (3h) (*note*[1])

****

Soit n un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note 0_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$. La *trace* d'une matrice U de $M_n(\mathbb{C})$ est notée $\operatorname{tr}(U)$. On dit que deux matrices U et V de $M_n(\mathbb{C})$ *commutent* si $UV = VU$. Une matrice N de $M_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $N^k = 0_n$.

Dans tout le problème, on considère une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé, c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Pour tout i dans $\{1, \ldots, r\}$ on note :

- α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P ;
- P_i le polynôme défini par $P_i(X) = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$;
- F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \ker\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_i}\right)$;
- f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par la restriction de f à F_i.

La partie B, à l'exception de la question 11), est indépendante de la partie A.
La partie C est indépendante des parties précédentes.
Cet énoncé comprend quatre pages.

A. Décomposition de Dunford

1) Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est somme directe des espaces F_i :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i.$$

2) En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente, montrer que pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$ le polynôme caractéristique de f_i est P_i. (On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i.)

3) Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = PAP^{-1}$ soit une matrice définie par blocs de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où $N_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$.

1. Quelques questions ont été ajoutées par votre professeur, pour démontrer l'existence de la base antéduale (résultat qui faisait partie du programme en 2011) ainsi que pour établir l'unicité de la décomposition de Dunford, unicité qui était admise dans le sujet original. Vous pouvez donc transformer ce (3h) en (4h).

4) En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

Les matrices D et N vérifiant ces conditions constituent la *décomposition de Dunford* de la matrice A. Dans toute la suite du problème, on admettra l'*unicité* de cette décomposition, c'est-à-dire que D et N sont déterminés de manière unique par A.

Un exemple pour n=3 :

5) Calculer la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

B. Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P on note comm_B et conj_P les endomrphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par

$$\forall X \in M_n(\mathbb{C}) \qquad \begin{cases} \mathrm{comm}_B(X) = BX - XB \\ \mathrm{conj}_P(X) = PXP^{-1} \end{cases}.$$

Le but de cette partie est de montrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

6) Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. Calculer $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$.

Pour tous i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i-ième et de la j-ième colonne qui est égal à 1.

7) Si A est une matrice diagonale, montrer que pour tous i, $j \in \{1, \ldots, n\}$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A.

8) En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.

9) Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\mathrm{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.

10) Montrer que si A est nilpotente, et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.

D'après la partie A, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\mathrm{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent : $dn = nd$

11) Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier > 0 et E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$. On note E^* le dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes liéaires sur E.

On considère une forme bilinéaire symétrique b sur E, c'est-à-dire une application $b : E \times E \to \mathbb{C}$ *linéaire par rapport à chacune de ses deux composantes* et telle que $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous x, $y \in E$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *orthogonal de F relativement à b* le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^{\perp_b} = \{x \in E ; \forall y \in F,\ b(x, y) = 0\}.$$

On suppose b est *non dégénérée*, c'est-à-dire que $F^{\perp_b} = \{0\}$.

12) Soit u un endomorphisme de E. Démontrer les implications suivantes :

$$(i)\ u \text{ est diagonalisable} \Rightarrow (ii)\ \mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^2 \Rightarrow (iii)\ \mathrm{Ker}\ u \cap \mathrm{Im}\ u = \{0\}.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension q, et soit $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_q)$ une base de F. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note φ_i la forme linéaire sur E définie par $\varphi_i(x) = b(\epsilon_i, x)$.

13) Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^*.

On complète cette famille libre en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ de E^*. On admet l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ de E, dite base *antéduale* de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, telle que pour tous i et j de $\{1, \dots, p\}$ on ait $\phi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker (note [2]).

14) Montrer que $F^{\perp_b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_p)$ et en déduire la valeur de $\dim F + \dim F^{\perp_b}$.

D. Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A) = \operatorname{Ker}((\operatorname{comm}_A)^2)$.

15) Montrer que l'application φ de $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, définie par la formule $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ pour tous X, $Y \in M_n(\mathbb{C})$, est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

16) Etablir l'égalité $(\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A))^{\perp_\varphi} = \operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A)$.

17) En déduire que si A est nilpotente, il existe une matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \operatorname{comm}_A(X)$. Calculer alors $\operatorname{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$ pour tout λ dans $\mathbb{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A définies à la question 4)

18) Démontrer qu'il existe une matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $N = \operatorname{comm}_A(X)$.

19) Conclure.

FIN DU PROBLÈME ORIGINAL

E. Les bases duale et antéduale

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur le corps $\mathbb{K}$. On note E^* son dual. On définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ pour i, $j \in \{1, \dots, n\}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

19) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, montrer qu'il existe une unique famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ d'éléments de E^* telle que pour tous i, $j \in \{1, \dots, n\}$ $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

20) Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.

21) Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est génératrice, en donnant une décompostion d'un élément φ de E^* sous la forme d'une combinaison linéaire des $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est donc une base de E^*, on l'appelle la *base duale* de la base $(e_1, \dots, e_n)$. On retrouve ainsi le résultat $\dim E = \dim E^*$.

22) Soit x un élément non nul de E, montrer qu'il existe au moins un φ dans E^* tel que $\varphi(x) = 1$. En déduire que si $\varphi(y) = 0$ pour tout φ de E^* alors $y = 0$.

23) Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. Montrer que l'application Φ de E vers $\mathbb{K}^n$ définie par $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ pour x dans E, est un isomorphisme.

24) En déduire l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tous i, $j \in \{1, \dots, n\}$ $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Cette base s'appelle la *base antéduale* de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

2. Ce résultat est démontré dans une partie supplémentaire.

F. Unicité de la décomposition de Dunford

On reprend les notations du problème. On a démontré que l'endomorphisme f peut s'écrire sous la forme $d + n$ où d est un endomorphisme diagonalisable et n un endomorphisme nilpotent avec de plus $nd = dn$. On va montrer qu'une décomposition vérifiant ces hypothèses est unique, en établissant que l'endomorphisme d, et par conséquent l'endomorphisme n, est uniquement déterminé par f.

On se donne une telle décomposition. Dans la suite n désigne l'endomorphisme nilpotent et non pas la dimension de $\mathbb{C}^n$.

25) Montrer que chaque F_i est stable par d et par n. On désigne par d_i et n_i les endomorphismes induits par d et n sur F_i.

26) Montrer que $d_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$ est à la fois diagonalisable et nilpotent.

27) Conclure.