ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2012 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet à traiter ci-après comprend 7 pages numérotées de 1 à 7.

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Si $0 \leqslant k \leqslant n$ sont des entiers, on pose :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Étant donné un entier $n \geqslant 1$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de déterminant non nul et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices de déterminant 1.

On note $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ l'algèbre des fonctions polynômiales de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i désigne la fonction $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose $\mathrm{X}^\alpha = \mathrm{X}_1^{\alpha_1}\mathrm{X}_2^{\alpha_2} \ldots \mathrm{X}_n^{\alpha_n}$. La famille $(\mathrm{X}^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ est une base de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Pour tout entier $k \geqslant 0$, on note $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_k$ l'ensemble des fonctions polynômiales homogènes d'ordre k, c'est-à-dire des fonctions $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ telles qu'on ait $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $x \in \mathbb{C}^n$.

I

Soit un entier $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_0$ est composé des fonctions constantes sur $\mathbb{C}^n$.

2. Montrer que, pour tout $k \geqslant 0$, l'ensemble $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_k$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$, et calculer sa dimension en fonction de n et k.

3. Montrer que $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ est la somme directe des sous-espaces $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]_k$, $k \geqslant 0$.

4. Soit un entier $m \geqslant 1$, et soit u une application linéaire de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^n$.

4.a. Montrer que, pour tout $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$, la fonction composée $f \circ u$ appartient à $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m]$.

4.b. Montrer que l'application $f \mapsto f \circ u$ est une application linéaire de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m]$, et que c'est un isomorphisme si et seulement si u est un isomorphisme.

II

Dans cette partie, on note $\mathscr{V}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Une fonction Φ de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{C}$ est dite polynômiale si la fonction :

$$(a, b, c) \mapsto \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right)$$

de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}$ est polynômiale. Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on note ${}^t\mathrm{A}$ la transposée de A.

1. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{V}$ inversible.

1.a. Déterminer l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme ${}^t\mathrm{AMA}$ avec $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

1.b. Déterminer l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme ${}^t\mathrm{AMA}$ avec $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

2. Soit Φ une fonction polynômiale de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{C}$.

2.a. Montrer que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, la fonction Φ^{A} de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\Phi^{\mathrm{A}} : \mathrm{M} \mapsto \Phi({}^t\mathrm{AMA})$$

est polynômiale sur $\mathscr{V}$.

2.b. Montrer que la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$x \mapsto \Phi\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

est polynômiale sur $\mathbb{C}$.

3. Soit f une fonction polynômiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que la fonction $\Phi = f \circ \det$ est polynômiale de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{C}$ et vérifie $\Phi^{\mathrm{A}} = \Phi$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

4. Montrer que toute fonction polynômiale de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{C}$ est continue sur $\mathscr{V}$.

5. Soit Φ une fonction polynômiale de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $\Phi^{\mathrm{A}} = \Phi$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\Phi = f \circ \det$.

III

Soit un entier $n \geqslant 1$. Un *monôme* de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ est un élément de la forme $\lambda \mathrm{X}^\alpha$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Étant donnés $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ dans $\mathbb{N}^n$, on note :

$$\alpha \prec \beta$$

si $\alpha \neq \beta$, et si le premier coefficient non nul de $\beta - \alpha$ est strictement positif, c'est-à-dire si le plus petit entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\beta_i \neq \alpha_i$ vérifie $\beta_i - \alpha_i > 0$. On note $\alpha \preccurlyeq \beta$ si l'on a soit $\alpha = \beta$, soit $\alpha \prec \beta$.

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}^n$.

2. Montrer que toute partie finie non vide de $\mathbb{N}^n$ possède un plus grand élément pour la relation d'ordre $\preccurlyeq$.

3. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$. Montrer que $\alpha \preccurlyeq \beta$ si et seulement si $\alpha + \gamma \preccurlyeq \beta + \gamma$.

4. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ non nulle, on note $\deg(f)$ le plus grand $\alpha \in \mathbb{N}^n$ pour la relation d'ordre $\preccurlyeq$ tel que le coefficient de f dans la base $(\mathrm{X}^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ soit non nul, qu'on appelle le *degré* de f. Montrer que, pour toutes $f, g \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ non nulles, on a $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$.

5. Soit $k \geqslant 1$ un entier et soient $f, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ non nulles. Montrer qu'il existe $r, q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $f = b_1 q_1 + \cdots + b_k q_k + r$;
2. si r contient un monôme de degré $\alpha \in \mathbb{N}^n$, alors pour tout entier $i \in \{1, \ldots, k\}$ l'un des coefficients de $\alpha - \deg(b_i)$ est strictement négatif.

6. Pour toute partie Λ de $\mathbb{N}^n$, on note $\mathrm{I}(\Lambda)$ l'idéal de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ engendré par les X^α, $\alpha \in \Lambda$. Soit Λ une partie de $\mathbb{N}^n$.

6.a. Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$. Montrer que $\mathrm{X}^\beta \in \mathrm{I}(\Lambda)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \Lambda$ tel qu'on ait $\beta - \alpha \in \mathbb{N}^n$.

6.b. Soit $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$. Montrer que $f \in \mathrm{I}(\Lambda)$ si et seulement si tous les monômes de f appartiennent à $\mathrm{I}(\Lambda)$.

6.c. Montrer qu'il existe une partie finie Λ_0 de Λ telle que $\mathrm{I}(\Lambda_0) = \mathrm{I}(\Lambda)$.

7. Soit I un idéal de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$. En considérant l'idéal engendré par les $\mathrm{X}^{\deg(f)}$ pour $f \in \mathrm{I}$ non nuls, montrer qu'il existe une partie finie F de I qui engendre I.

8. Soit $(f_k)_{k \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$, et soit I l'idéal de $\mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ engendré par les f_k, $k \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un entier $r \geqslant 0$ tel que I soit engendré par $f_0, \ldots, f_r$.

IV

Soit un entier $m \geqslant 0$. On note $\mathscr{B}_m = \mathbb{C}[\mathrm{U}, \mathrm{V}]_m$ l'espace des fonctions polynômiales de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ qui sont homogènes d'ordre m. Pour chaque entier $i \in \{0, \dots, m\}$, on note e_i la fonction polynômiale :

$$\binom{m}{i} \mathrm{U}^{m-i} \mathrm{V}^i : (u, v) \mapsto \binom{m}{i} u^{m-i} v^i.$$

Les fonctions $e_0, e_1, \dots, e_m$ forment une base de $\mathscr{B}_m$. On identifiera $\mathscr{B}_m$ à $\mathbb{C}^{m+1}$ au moyen de cette base. Une fonction Φ de $\mathscr{B}_m$ dans $\mathbb{C}$ sera donc dite polynômiale si la fonction :

$$(x_0, x_1, \dots, x_m) \mapsto \Phi\left(x_0 e_0 + x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m\right)$$

de $\mathbb{C}^{m+1}$ dans $\mathbb{C}$ est polynômiale. On note $\mathscr{E}_m = \mathbb{C}[\mathrm{X}_0, \dots, \mathrm{X}_m]$ l'algèbre des fonctions polynômiales de $\mathscr{B}_m$ dans $\mathbb{C}$. Enfin, si $f \in \mathscr{B}_m$ et si :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}),$$

on note f^{A} la fonction de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$f^{\mathrm{A}} : (u, v) \mapsto f(\mathrm{A}(u, v)) = f(au + bv, cu + dv).$$

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

1.a. Montrer que l'application $f \mapsto f^{\mathrm{A}}$ définit un endomorphisme linéaire de $\mathscr{B}_m$.

1.b. Pour tout $\Phi \in \mathscr{E}_m$, on note Φ^{A} la fonction de $\mathscr{B}_m$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\Phi^{\mathrm{A}} : f \mapsto \Phi(f^{\mathrm{A}}).$$

Montrer que l'application $\Phi \mapsto \Phi^{\mathrm{A}}$ définit un endomorphisme linéaire de $\mathscr{E}_m$.

2. Pour tout $k \geqslant 0$, on note $\mathscr{E}_{m,k}$ le sous-espace de $\mathscr{E}_m$ composé des fonctions homogènes d'ordre k. Montrer que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, l'endomorphisme $\Phi \mapsto \Phi^{\mathrm{A}}$ laisse stable chacun des sous-espaces $\mathscr{E}_{m,k}$, $k \geqslant 0$.

3. Soient des entiers $k, p \geqslant 0$. On note $\mathscr{E}_{m,k,p}$ le sous-espace de $\mathscr{E}_{m,k}$ engendré par les X^ν avec $\nu = (\nu_0, \dots, \nu_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$ tels que $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_m = k$ et $\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + m\nu_m = p$. Montrer que $\mathscr{E}_{m,k}$ est la somme directe des $\mathscr{E}_{m,k,p}$ pour $p \geqslant 0$.

4. Pour tout $i \in \{0, \dots, m\}$, on note D_i l'application linéaire de $\mathscr{E}_m$ dans $\mathscr{E}_m$ de dérivation par rapport à X_i. On définit deux endomorphismes linéaires D et D′ de $\mathscr{E}_m$ par :

$$\mathrm{D}(\Phi) = \sum_{i=1}^{m} i\mathrm{X}_{i-1}\mathrm{D}_i(\Phi), \quad \mathrm{D}'(\Phi) = \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)\mathrm{X}_{i+1}\mathrm{D}_i(\Phi)$$

pour tout $\Phi \in \mathscr{E}_m$. Soient des entiers $k \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$.

4.a. Montrer qu'on a $\mathrm{D}(\mathscr{E}_{m,k,p+1}) \subseteq \mathscr{E}_{m,k,p}$ et $\mathrm{D}'(\mathscr{E}_{m,k,p}) \subseteq \mathscr{E}_{m,k,p+1}$.

4.b. Montrer que, pour tout $\Phi \in \mathscr{E}_{m,k,p}$, on a :

$$(\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(\Phi) = (mk - 2p)\Phi.$$

4.c. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note respectivement D^n et D'^n les puissances n-ièmes des endomorphismes D et D′. Montrer que, pour tout entier $r \geqslant 1$ et tout $\Phi \in \mathscr{E}_{m,k,p}$, on a :

$$(\mathrm{D}^r\mathrm{D}' - \mathrm{D}'\mathrm{D}^r)(\Phi) = r(mk - 2p + r - 1)\mathrm{D}^{r-1}(\Phi) \tag{1}$$

et :

$$(\mathrm{DD}'^r - \mathrm{D}'^r\mathrm{D})(\Phi) = r(mk - 2p - r + 1)\mathrm{D}'^{r-1}(\Phi). \tag{2}$$

4.d. On suppose que $mk - 2p = 0$. Montrer que, pour tout $\Phi \in \mathscr{E}_{m,k,p}$, on a $\mathrm{D}(\Phi) = 0$ si et seulement si $\mathrm{D}'(\Phi) = 0$. *(On pourra commencer par montrer que* D *et* D′ *sont des endomorphismes nilpotents de $\mathscr{E}_{m,k}$.)*

5. Soit un entier $k \geqslant 0$, et soit $\Phi \in \mathscr{E}_{m,k}$ une fonction non nulle.

5.a. Montrer que $\Phi^{\mathrm{A}} = \Phi$ pour toute matrice A de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*,$$

si et seulement si mk est pair et $\Phi \in \mathscr{E}_{m,k,mk/2}$.

5.b. Montrer que $\Phi^{\mathrm{A}} = \Phi$ pour toute matrice A de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{C},$$

si et seulement si $\mathrm{D}(\Phi) = 0$.

5.c. Montrer que $\Phi^{\mathrm{A}} = \Phi$ pour toute matrice A de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{C},$$

si et seulement si $\mathrm{D}'(\Phi) = 0$.

6. On note $\mathscr{I}_m$ l'ensemble des fonctions $\Phi \in \mathscr{E}_m$ telles que $\Phi^{\mathrm{A}} = \Phi$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

6.a. Montrer que $\mathscr{I}_m$ est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}_m$.

6.b. Montrer que $\mathscr{I}_m$ est la somme directe des $\mathscr{I}_{m,k} = \mathscr{I}_m \cap \mathscr{E}_{m,k}$ pour $k \geqslant 0$.

7. Soit un entier $k \geqslant 0$ tel que $\mathscr{I}_{m,k}$ soit de dimension $\geqslant 1$.

7.a. Montrer que mk est pair et que $\mathscr{I}_{m,k}$ est inclus dans $\mathscr{E}_{m,k,mk/2}$.

7.b. Montrer que, pour tout $\Phi \in \mathscr{I}_{m,k}$ et tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on a $\Phi^{\mathrm{A}} = \det(\mathrm{A})^{mk/2}\Phi$.

V

Une fonction Φ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est dite polynômiale si la fonction :

$$(a,b,c,d) \mapsto \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

de $\mathbb{C}^4$ dans $\mathbb{C}$ est polynômiale. On note $\mathscr{P}$ l'algèbre des fonctions polynômiales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathrm{D}_a, \mathrm{D}_b, \mathrm{D}_c, \mathrm{D}_d$ les endomorphismes de dérivation par rapport à a, b, c, d respectivement, et on pose :

$$\Omega = \mathrm{D}_a\mathrm{D}_d - \mathrm{D}_b\mathrm{D}_c,$$

qui est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{P}$.

1. Soit $\mathrm{G} \in \mathscr{P}$ et soit $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On note F la fonction de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\mathrm{F} : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{G}(\mathrm{AB})$. Montrer que F est polynômiale et que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on a :

$$\Omega(\mathrm{F})(\mathrm{A}) = \Omega(\mathrm{G})(\mathrm{AB})\det(\mathrm{B}).$$

2. Soit $\Phi \in \mathscr{E}_m$ et soit un entier $r \geqslant 0$. Pour tout $f \in \mathscr{B}_m$, on définit une fonction G_f de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\mathrm{G}_f : \mathrm{A} \mapsto \Phi(f^{\mathrm{A}})\det(\mathrm{A})^r. \tag{3}$$

2.a. Soit $f \in \mathscr{B}_m$. Montrer que G_f appartient à $\mathscr{P}$.

2.b. Montrer qu'il y a un entier $q \geqslant r$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{B}_m$, la fonction $\Omega^q(\mathrm{G}_f)$ soit constante sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, où Ω^q désigne la puissance q-ième de l'endomorphisme Ω.

2.c. Soit un entier $q \geqslant r$ tel que, pour tout $f \in \mathscr{B}_m$, la fonction $\Omega^q(\mathrm{G}_f)$ soit constante sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que la fonction Θ de $\mathscr{E}_m$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\Theta : f \mapsto \Omega^q(\mathrm{G}_f)$$

appartient à $\mathscr{I}_m$ et vérifie $\Theta(f^{\mathrm{A}}) = \Theta(f)\det(\mathrm{A})^{q-r}$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

3. Soit un entier $q \geqslant 0$ et soit G la fonction de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\mathrm{G}(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A})^q$. Calculer $\Omega^q(\mathrm{G})$ en fonction de q.

4. Soit un entier $k \geqslant 0$, et soit $\Psi \in \mathscr{I}_{m,k}$. Montrer qu'il existe une fonction $\Phi \in \mathscr{E}_m$ et des entiers $0 \leqslant r \leqslant q$ tels que, pour tout $f \in \mathscr{B}_m$, la fonction $\Omega^q(\mathrm{G}_f)$ soit constante sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et de valeur $\Psi(f)$.

5. Soit un entier $r \geqslant 1$, soient $\Psi_1, \dots \Psi_r \in \mathscr{I}_m$ et soient $\Phi_1, \dots \Phi_r \in \mathscr{E}_m$ tels que :

$$\Psi = \Phi_1\Psi_1 + \cdots + \Phi_r\Psi_r$$

appartienne à $\mathscr{I}_m$. Montrer qu'il existe $\Pi_1, \dots \Pi_r \in \mathscr{I}_m$ tels que $\Psi = \Pi_1\Psi_1 + \cdots + \Pi_r\Psi_r$.

6. Montrer qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ et des fonctions $\Psi_1, \dots \Psi_r \in \mathscr{I}_m$ telles que, pour toute fonction $\Psi \in \mathscr{I}_m$, il existe $f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r]$ telle que $\Psi = f(\Psi_1, \dots, \Psi_r)$.

FIN