Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n - x^{n-1} - \qquad - 1.$

$f(x) = 0 \iff g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ où $g(y) = -y^n f\left(\frac{1}{y}\right)$

Or $g(y) = y^n + y^{n-1} \qquad + y - 1.$ g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

$\forall y \in \mathbb{R}^{*+} \quad g'(y) = n y^{n-1} + \dots + 2y + 1 > 0$

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, or $\lim_{x \to 0} g(x) = -1$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Puisque de plus g est ~~...~~ continue, g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$,

en particulier il existe un unique y_n dans $\mathbb{R}^{*+}$ tel que $g(y_n) = 0$.

Il existe donc un unique x_n $\left(= \frac{1}{y_n}\right)$ dans $\mathbb{R}^{*+}$ tel que. $f(x_n) = 0$