Exercice 3.

1) $O_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tMM = I_n \}$

2) $O_n(\mathbb{R})$ est fermé car $f : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^tMM \end{array}$ est continue car chaque coefficient de $f(M)$ est une fonction polynomiale des coefficients de M

Or $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ et $\{I_n\} = B_f(I_n, 0)$ est fermé.

+ $O_n(\mathbb{R})$ est borné. En effet choisissons sur $M_n(\mathbb{R})$ $\|M\| = \sup_{i,j} |m_{i,j}|$

(Toutes les normes sont équivalentes car $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie)

Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ alors $\forall j \ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2 = 1$ donc $\forall i,j \ |m_{i,j}| \leq 1$

donc $\|M\| \leq 1$.

$\forall M \in O_n(\mathbb{R})$ $\|M\| \leq 1$ $\therefore$ $O_n(\mathbb{R})$ est borné

$\left\{ \begin{array}{l} O_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé et borné} \\ M_n(\mathbb{R}) \text{ est de dimension finie.} \end{array} \right.$ Donc $O_n(\mathbb{R})$ est compact.