Exercice 4. Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ non inversible. ~~Il existe donc~~

Il existe donc $\underline{X \neq 0}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$ tel que $\underline{MX = 0}$.

Soit i_0 tel que $\underline{|x_{i_0}|} = \sup_{1 \leq i \leq n} \underline{|x_i| > 0}$.

En regardant le coefficient de la i_0-ième ligne de MX on obtient

$$0 = \sum_{i=1}^{n} m_{i_0,j}\, x_j$$

$$m_{i_0,i_0}\, x_{i_0} = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} m_{i_0,j}\, x_j$$

$$|m_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} |m_{i_0,j}|\,|x_j|$$

$$\underline{|m_{i_0,i_0}| \leq \sum_{i\neq i_0} |m_{i_0,j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{i \neq i_0} |m_{i_0,j}|}$$

<u>Par contraposée</u>.

si $\forall i \quad |m_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{i,j}|$ M est inversible.