Exercice 8. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)$. u_n est défini dès $n \geq 1$.

De plus $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + z_n$ avec $z_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge (car $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 en décroissant et c'est une série alternée)
- $-\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n}$ diverge. (Série harmonique (ou règle de Riemann))
- $|z_n| = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $3/2 > 1$ donc $\sum_{n\geq 1} |z_n|$ converge (Règle de Riemann)

Donc $\sum_{n\geq 1} z_n$ converge absolument donc converge

Donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge. (Somme de deux séries convergentes et d'une seule série divergente)