Exercice 9. * $\forall X \in \mathbb{R}^{*+}$ $\displaystyle\int_0^X \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{n_X\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{n_X\pi}^X \frac{\sin x}{x}\,dx$ avec $n_X = \left\lfloor \frac{X}{\pi} \right\rfloor$

$$\left| \int_{n_X\pi}^{X} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \leq \int_{n_X\pi}^{X} \frac{dx}{x} \leq (X - n_X\pi) \times \frac{1}{n_X\pi} \leq \frac{\pi}{n_X\pi} = \frac{1}{n_X}$$

donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_{n_X\pi}^{X} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0$. Pour prouver que $\displaystyle\lim_{\substack{X\to+\infty\\ X\in\mathbb{R}^{*+}}} \int_0^X \frac{\sin x}{x}\,dx$ existe

il suffit donc de prouver $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}^*}} \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ existe.

* Or $\displaystyle\int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Il suffit donc de prouver que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge

avec $\displaystyle u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Or le changement de variable $x = n\pi + t$ donne $\displaystyle u_n = (-1)^n \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt}_{\geq 0}$, donc

$\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série alternée.

$$|u_n| - |u_{n+1}| = \int_0^{\pi} \underbrace{(\sin t)}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{1}{t+n\pi} - \frac{1}{t+(n+1)\pi}\right)}_{\geq 0} dt \geq 0$$, donc $(|u_n|)_{n\geq 0}$ est décroissante.

$$|u_n| \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt \underset{\text{pour } n\geq 1}{\leq} \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,dt = \frac{1}{n}$$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On peut appliquer la règle de Leibniz $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.