Excercice 10

question 1. L'intervalle $]0,1] \subset]0,\frac{\pi}{2}]$ est stable par sin. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in]0,1]$.

$\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$ $\sin x \leq x$ Donc la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Elle est minorée par 0, elle converge donc vers un ℓ dans $[0,1]$.

sin est continue sur $[0,1]$. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = \sin u_n$

on obtient $\ell = \sin \ell$ et $\ell \in [0,1]$. Donc $\ell = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in]0,1] \subset]0,\frac{\pi}{2}]$.

question 2. On va employer la méthode des petits pas.

On cherche α dans $\mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ tende vers une limite c non nulle.

On remarque que puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$, u_n^α est bien défini même pour $\alpha < 0$.

$u_{n+1}^\alpha = \sin u_n^\alpha = \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^\alpha$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$= u_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^\alpha = u_n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{6} u_n^2 + o(u_n^2)\right)$.

$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = -\frac{\alpha}{6} u_n^{2+\alpha} + o(u_n^{2+\alpha})$.

le choix de $\alpha = -2$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{1}{3} > 0$.

- La suite $\left(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}\right)_{n\geqslant 0}$ est donc positive à partir d'un certain rang (en fait tout le temps car $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante)

- $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3}$ diverge (et c'est une série à termes positifs !).

le théorème de sommation des équivalents nous permet d'affirmer que $\sum_{n\geqslant 0} \left(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}\right)$ diverge mais surtout que

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \sim \frac{n}{3}$$

$$\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3} \qquad \left(\text{car } \frac{1}{u_0^2} = o\left(\frac{n}{3}\right)\right)$$

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

q.e.d.