Exercice 11 La formule du Binôme donne. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}$.

On a donc

$\forall z \in \mathbb{C} \left[\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \right]$ avec $\begin{array}{|l} u_k(n) = 0 \text{ si } k > n. \\ u_k(n) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} z^k \text{ si } n \geq k. \end{array}$

*) On a si $n \geq k$ $u_k(n) = \frac{1}{n^k} \frac{1}{k!} n(n-1) \quad (n-k+1) z^k = \frac{1}{k!} 1 \left(1-\frac{1}{n}\right) \quad \left(1 - \frac{(k-1)}{n}\right) z^k$.

donc $|u_k(n)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$ ~~[illegible]~~

si $k > n$ $|u_k(n)| = 0 \leq \frac{|z|^k}{k!}$

On a donc $\left(\forall k \in \mathbb{N} \quad \|u_k\|_\infty \leq \frac{|z|^k}{k!}\right)$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{|z|^k}{k!}$ converge (vers $e^{|z|}$) donc

$\sum_{k \geq 0} u_k$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{N}$.

*De plus $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \geq k}} u_k(n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) z^k = \frac{z^k}{k!}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \to +\infty} u_k(n) = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \geq k}} u_k(n) = \frac{z^k}{k!}$

Puisqu'il est possible de permuter limite et sommation (convergence uniforme) $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$.