Exercice 12.

1) Le théorème de Weierstrass dit que tout fonction continue sur $[a,b]$, segment de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

2) On démontre ce théorème pour une fonction f continue de $[0,1]$ vers $\mathbb{C}$ en montrant que la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, où $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [0,1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

* Considérons la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, sa loi est $P(\cancel{B(n,x)}\ X=k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ $0 \leq k \leq n$ (si X suit une loi binomiale).

On a $E(X) = nx$ $V(X) = nx(1-x)$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que $\forall \eta > 0$ $P(|X-nx| \geq \eta) \leq \frac{V(X)}{\eta^2}$

c'est à dire.

$$\sum_{\substack{k=0 \\ |k-nx| \geq \eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{nx(1-x)}{\eta^2} \leq \frac{n}{4\eta^2} \quad (\text{car } 0 \leq x(1-x) \leq \tfrac{1}{4})$$

En remplaçant η par $n\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ on obtient.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^{*+} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ |\frac{k}{n}-x| \geq \alpha}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

· D'autre part $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$ donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x)\, x^k (1-x)^{n-k}$

De plus f est continue sur le compact $[0,1]$ donc uniformément continue,

donc $\forall \varepsilon' > 0 \ \exists \alpha' \in \mathbb{R}^{+} \ \forall (y,z) \in [0,1] \ |y-z| \leq \alpha' \ |f(y) - f(z)| < \varepsilon'$.

Soit $\varepsilon > 0$, prenons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ et α ~~le~~ α' associé, $z = x$ et $y = \frac{k}{n}$ $0 \leq k \leq n$.

Or aura. ~~[illegible]~~ $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall k \ 0 \leq k \leq n \ \forall x. \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha \quad \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\forall x \in [0,1]$

$$|f(x) - B_n(f)(x)| = \left|\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x)\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \underbrace{\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\leq 2\|f\|_\infty} + \sum_{\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \underbrace{\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$\forall x \in [0,1] \ |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{2}$. soit $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{2}$

or il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \ \frac{2\|f\|_\infty}{4n\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ et par conséquent, en synthétisant :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon$, soit $\lim_{n \to +\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$

Ce qui veut bien dire que $B_n(f)$ converge uniformément vers f.