Chapitre 14

Espaces préhilbertiens et euclidiens

14.1 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Proposition 14.1 *Dans un espace préhibertien réel, de dimension finie ou non, l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace. On l'appelle le supplémentaire orthogonal.*

Première démonstration :
On sait déja que F et $F^\perp$ sont en somme directe. Il reste à prouver $F+F^\perp = E$. Pour cela, soit x dans E. F est de dimension finie donc F admet une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$. On cherche à écrire x sous la forme $x = x_F + x_{F^\perp}$ avec x_F dans F et $x_{F^\perp}$ dans $F^\perp$. x_f s'écrit donc $x_F = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. On veut de plus $x - x_F$ dans $F^\perp$, ce qui impose

$$\forall i \quad (e_i | x - x_F) = 0 = (e_i|) - \alpha_i.$$

x_F est déterminé de manière unique par

$$x_F = \sum_{i=1}^n (e_i|x) e_i.$$

Réciproquement si on définit ainsi x_F, alors x_F est dans F et $(x - x_F | e_i) = 0$ pour tout. Or $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice et le produit scalaire est linéaire à droite, donc, pour tout y de F $(x - x_F|y) = 0$ et $x - x_F = x_{F^\perp}$ est dans $F^\perp$.

q.e.d.

Deuxième démonstration : on montre que la distance à F est atteinte en un élément x_F de F. En écrivant , si y est dans F, que pour tout t réel :

$$\|x - (x_F + ty)\|^2 \geq \|x - x_F\|^2,$$

on obtient $(x - x_F|y)$ pour tout y de F, donx $x - x_F \in \mathbb{F}^\perp$

Définition 14.1 *La projection orthogonale de E sur F est la projection de E sur F parallèlement à $F^\perp$.*

Notons la p_F.

Proposition 14.2 *Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors*

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^p (e_k|x) e_k.$$

Si la base est seulement orthogonale alors

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^p \frac{(e_k|x)}{(e_k|e_k)} e_k.$$

Soit F un sous-espace de dimension finie dans un espace préhilbertien réel, par exemple un sous-espace d'un espace euclidien. Soit x un élement de E, on rappelle que la distance de x à F est la borne inférieure des distances de x aux éléments de F :

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Proposition 14.3 *Dans un espace préhibertien réel la distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie est atteinte en un unique élément qui est la projection orthogonale de vecteur sur ce sous-espace. Avec les notations du paragraphe précédent :*

$$\forall y \in F - \{p_F(x)\} \quad \|x-y\| > \|x - p_F(x)\| = \mathrm{d}(x,F),$$

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \mathrm{d}^2(x,F).$$

Exemple 14.1 *Déterminer* $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (1-ax-bx^2)^2\,dx$.

Exemple 14.2 *La droite de régression.*

Un corollaire de la dernière égalité est l'inégalité, dite de Bessel[1].

Proposition 14.4 *Soit* $(e_1,\dots,e_n)$ *une famille orthonormale et* x *un élément de* E*, alors :*

$$\sum_{k=1}^{n} (e_k,x)^2 \leq \|x\|^2.$$

14.2 Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réelle

Définition 14.2 *Soit* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'éléments d'un espace préhilbertien* E*, et* F *l'espace vectoriel engendré par cette famille. Cette famille est dite totale si elle vérifie une des trois conditions équivalentes suivantes :*

— F *est dense dans* E.
— *Pour tout* x *de* E $d(x,F)=0$.
— *Pour tout* x *de* E *il existe* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $F^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

L'équivalence de ces trois définitions résulte des propriétés caractéristiques de l'adhérence.

Exemple 14.3 *Le théorème de Weierstrass affirme que si on prend* $E = \mathcal{C}([\dashv,\lfloor])$ *et* $e_n = x^n$*, alors* F *est dense dans* $(E, \|.\|_\infty$*. On peut munir* E *d'un produit scalaire en posant* $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$*. On note* $\|.\|_2$ *la norme associée à ce produit scalaire. On a :*

$$\forall (f,g)\in E^2 \quad \|f-g\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f-g\|_\infty.$$

Il en résulte que F *est dense dans* E *pour* $\|.\|_2$*. La famille* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc totale.*

Proposition 14.5 *Soit* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien* E*. Soit* p_n *le projecteur orthogonal sur* $F_n = \mathrm{Vect}\{e_k; 0\leq k\leq n\}$*. Alors, pour tout* x*dans* E *muni de la norme associé au produit scalaire on a :*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} (e_n|x)e_n$$

au sens de

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - \sum_{k=0}^{n}(e_k|x)e_k\| = 0, \ \textit{ou bien} \ \lim_{n\to+\infty} p_n(x) = x.$$

On en déduit, puisque

$$\|x\|^2 = \|p_n(x)\|^2 + \|x-p_n(x)\|^2,$$

que

$$\lim_{n\to+\infty} \|p_n(x)\|^2 = \|x\|^2,$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (e_k|x)^2 = \|x\|^2.$$

1. Bessel Friedrich Wilhelm (1784 Minden –1846 Königsberg) astronome allemand, le premier à avoir effectué, en 1838, la mesure précise de l'éloignement d'une étoile. Connu aussi pour les fonctions de Bessel.

Exercice 1: *Etablir la réciproque : si pour tout x $\sum_{k=1}^{+\infty}(e_k,x)^2 \leq \|x\|^2$,alors la suite, supposée orthonormale, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale*

Dans la pratique la famille (e_n) ne sera pas orthonormale. On sera alors amené à l'orthonormaliser par la méthode de Schmidt pour pouvoir utiliser les résultats précédents.

Un exemple classique : Orthogonalisation d'une famille de polynômes.

La forme bilinéaire $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Montrons qu'il existe une unique suite (P_n) de polynômes unitaires [2] vérifiant :

$$\forall n \quad \deg P_n = n \qquad \forall n \neq m \ (P_n|P_m) = 0.$$

En effet nécéssairement $P_0 = 1$. Supposons $(P_0,\dots,P_n)$ construite vérifiant les propriété voulues, il suffit de prouver qu'il existe un et un seul polynôme P_{n+1} unitaire, vérifiant

$$\deg P_{n+1} = n+1, \quad \forall m \leq n \ (P_n, P_m).$$

Or un polynôme unitaire de degré $n+1$ s'écrit de manière unique $X^{n+1}+Q$, où Q est de degré au plus n, soit puisque $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, tout polynôme P unitaire de degré $n+1$ s'écrit

$$X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k P_k.$$

Les conditions $(P_m|P) = 0$, $0 \leq m \leq n$, déterminent bien un unique P, qui est P_{n+1}, donné par

$$P_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(P_k|X^{n+1})}{(P_k|P_k)} P_k.$$

Soit $Q_n = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$. On montre facilement que Q_n est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant est $(-1)^n$ et qui vérifie si $m < n$:

$$\begin{aligned}
(Q_m|Q_n) &= \int_0^{+\infty} Q_m(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)\,dx \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}Q_m(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n e^{-x}\right)\,dx \\
&= (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{d^k}{dx^k}Q_m(x)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(x^n e^{-x}\right)\,dx \\
&= (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}Q_m(x)\left(x^n e^{-x}\right)\,dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par unicité de la suite (P_n), on en déduit pour tout n, $P_n = (-1)^n Q_n$.

Remarquons que

$$\begin{aligned}
(Q_n|Q_n) &= (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}Q_n(x)\left(x^n e^{-x}\right)\,dx \\
&= n! \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = (n!)^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\|P_n\| = \frac{1}{n!}$.

2. L'appellation "unitaire", dans le contexte ou nous nous trouvons peut désigner deux propriétés du polynôme. Celle d'avoir son coefficient dominant égal à 1, et celle d'avoir une norme égale à 1. Ces propriétés sont rarement compatibles. Pour éviter toute ambiguïté, on peut dire d'un polynôme dont le coefficient dominant est 1, qu'il est normalisé.

14.3 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

E désigne jusqu'à la fin du chapitre un espace euclidien, c'est-à-dire un espace préhilbertien (réel) de dimension finie.

Définition 14.3 *Un endomorphisme u d'un espace préhilbertien réel E est dit symétrique (anciennement autoadjoint) si et seulement si :* $\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = (x|u(y))$

Proposition 14.6 *Un endomorphisme est si métrique si et seulement si sa matrice dans une/toute base orthonormale est symétrique.*

Remarque 14.1 *Si dans une base orthonormale la matrice de u est symétrique alors u est symétrique. i u est symétrique, sa matrice dans toute base orthonormale est symétrique.*

Réciproquement à toute matrice symétrique on peut associer naturellement un endomorphisme autoadjoint. On identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(X|Y) = {}^tXY$ (en identifiant à nouveau une matrice $(1,1)$ avec un scalaire), l'application linéaire

$$\Phi_A : X \mapsto AX$$

est symétrique si et seulement si A est symétrique.

L'ensemble des endomorphismes symétriques est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. Si n est la dimension de E il est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 14.7 *Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs qui sont symétriques.*

Ce qui suit n'est plus au programme, mais continue à faire l'objet de problèmes.

Définition 14.4 *Un endomorphisme symétrique u est positif si et seulement si pour tout x $(u(x)|x) \geq 0$. Il est défini positif si et seulement si pour tout x non nul $(u(x)|x) > 0$.*

On définit de même les matrices symétriques positives et définies positives. Un matrice symétrique A est positive (rep. définie positive) si et seulement si Φ_A est positif (resp. défini positif).

Exemple : Si M est dans $M_n(\mathbb{R})$ les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont symétriques et positives. Elles sont définies positives si et seulement si A est inversible.

Théorème 14.1 (Théorème spectral, version endomorphisme) *Soit E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E. Il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de u. Ce qui se dit aussi : u est diagonalisable dans une base orthonormale.*

Lemme 14.1 *Si E est un espace euclidien non réduit à $\{0\}$ tout endomorphisme symétrique de E admet au moins une valeur propre.*

Première démonstration :

La fonction $\varphi : x \mapsto (x|u(x)$ est continue (composée du produit scalaire qui est une forme bilinéaire continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovski et la caractérisation des applications bilinéaires continues, et de l'application linéaire $x \mapsto (x, u(x))$ qui est continue puisque définie sur un espace de dimension finie). L'ensemble $K = S(0,1) = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est un compact non vide (il est non vide car E est non-réduit à $\{0\}$, il est compact car il est fermé et borné.) L'application φ atteint donc un maximum sur K. Il existe x_0 dans $\mathbb{K}$ tel que

$$\forall x \in K \quad (x|u(x)) \leq (x_0|u(x_0)) = \lambda.$$

Or si y est non nul dans E, $x = \frac{1}{\|y\|}y$ est dans K. En utilisant l'inégalité précédente, on en déduit

$$\forall y \in E \ y \neq 0 \quad (y|u(y)) \leq \lambda \|y\|^2,$$

ce résultat étant aussi vrai pour $y = 0$.

La forme quadratique $q : x \mapsto \lambda\|y\|^2 - (y|u(y))$ est donc positive. Puisque u est autoadjoint, sa forme polaire est $B(x,y) = \lambda(x|y) - (x|u(y)) = (x|\lambda y - u(y))$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii on a donc :

$$\forall x \in E \quad ((x|\lambda y - u(y)))^2 \leq (x|\lambda x - u(x))(y|\lambda y - u(y)).$$

Par définition de λ le second membre est nul pour $y = x_0$. On obtient

$$\forall x \in E \quad (x|\lambda x_0 - u(x_0)).$$

Or le produit scalaire est non dégénéré donc $u(x_0) = \lambda x_0$, et, puisque x_0 est non nul, x_0 est vecteur propre et λ valeur propre.

Cette démonstration peut paraître complexe en regard de celle qui va suivre, mais elle en fait plus intéressante car elle se généralise aux espaces de dimension infinie et surtout elle donne une interprétation géométrique de la plus grande valeur propre d'un endomorphisme symétrique.

Deuxième démonstration : Les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice de u sont réelles.

Toutes les matrices de u dans des bases quelconques étant semblables elles ont toutes même polynôme caractéristique et en particulier même spectre. Soit donc M la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$. Puisque u est autoadjoint et $\lfloor$ symétrique la matrice M est symétrique. Prouvons que les valeurs propres réelles ou complexes d'une matrice M symétrique sont en fait réelles.

Soit λ une valeur propre (dans $\mathbb{C}$) de M et X dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. On a $MX = \lambda X$, puis en passant au conjugué $\overline{MX} = \overline{\lambda X}$, soit $\overline{M}\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, puis, car M est réelle, $M\overline{X} = \overline{\lambda X}$. On transpose et on multiplie à droite par X on obtient

$$\overline{\lambda}{}^t\overline{X}X = {}^t(M\overline{X})X = {}^t\overline{X}MX = {}^t\overline{X}(MX) = \lambda{}^t\overline{X}X.$$

Or X est non nul donc ${}^t\overline{X}X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$ et en simplifiant $\overline{\lambda} = \lambda$ et λ est réel.

Lemme 14.2 *Si F est un sous-espace stable par l'endomorphisme symétrique u, alors u induit sur l'orthogonal de F un endomorphisme symétrique.*

Démonstration directe : Le polynôme minimal de u est scindé à racines simples.

Théorème 14.2 (Théorème spectral, version matricielle) *Une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement si elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.*

Certains emploient l'expression « est diagonalisable dans une base orthonormale », au lieu de « est orthogonalement semblable ». En toute rigueur c'est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice qui est diagonalisable dans une base orthonormale, en supposant $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

14.4 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

14.4.1 Isométries vectorielles

Définition 14.5 *En endomorphisme u de E est une isométrie vectorielles (on dit aussi un automorphisme orthogonal) si et seulement si il vérifie une des conditions équivalentes suivantes :*

i) $\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

ii) $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$.

Exemple 14.4 *Exemple d'automorphisme orthogonal : la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace. Cas particuler la réflexion, symétrie par rapport à un hyperplan.*

Exemple 14.5 *Exemples des réflexions échangeant deux vecteurs ; interprétation géométrique : réflexions échangeant deux droites.*

Définition 14.6 *Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle vérifie une des conditions équivalentes suivantes :*

i) ${}^tM\,M = I_n$.

ii) $M\,{}^tM = I_n$.

iii) M *est inversible et* ${}^tM = M^{-1}$.

Exercice 1: *Si M est une matrice orthogonale, alors il en est de même de ${}^tM$*

Proposition 14.8 *Une matrice est orthogonale si et seulement si elle la matrice d'un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.*

Proposition 14.9 *Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale. Elle le reste alors dans toute base.*

Corollaire 14.1 *Si u est une isométrie vectorielle alors* $\det u = \pm 1$. *Si* $\det u = 1$ *on dit que u est une isométrie directe, si* $\det u = -1$ *on parle d'isométrie indirecte.*

Proposition 14.10 *Une matrice est orthogonale si et seulement si elle est la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale.*

14.4.2 Stabilité

Proposition 14.11 *Si u est une isométrie vectorielle et si F est un sous-espace stable par F alors $F^\perp$ est stable par u.*

14.4.3 Réduction des isométries vectorielles

Proposition 14.12 *Si u est une isométrie vectorielle il existe une base orthonomale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme I_p, $-I_q$ ou $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in]0, \pi[$.*

Remarque 14.2 *L'isométrie u sera alors directe si q est pair.*

Corollaire 14.2 (Interprétation matricielle) *Tout matrice orthogonale est orthogonalement semblable à une matrice du type précédent.*

Exercice 1: *Montrer que le groupe $SO(n)$ est connexe par arcs* En est-il de même de $O(n)$?

Un cas particulier intéressant est celui de de la dimension 3.

Proposition 14.13 *Une endomorphisme u d'un espace euclidien E de dimension* 3 *est une isométrie directe (on dit aussi rotation) si et seulement si il existe une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) dans laquelle la matrice de u est de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si u n'est pas l'identité, la droite engendré par e_1 s'appelle l'axe de la rotation et θ l'angle de la rotation, si l'axe est orienté par e_1 et l'espace par (e_1, e_2, e_3).