Espaces vectoriels normés I

Exercice 1: Montrer que toute boule ouverte ou fermée est convexe.

Exercice 2: Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel normé. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$ si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B_2(0,r) \subset B_1(0,1)$, où B_i désigne la boule ouverte pour la norme N_i.

Exercice 3:
1) Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
2) Dans un espace vectoriel normé un hyperplan est fermé ou dense.

Exercice 4: *Le lemme de Cesàro* Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé quelconque convergeant vers la limite l. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

converge aussi vers l.

Exercice 5: Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Si f appartient à E, on définit $k(f)$ comme le plus petit réel positif tel que

$$\forall (t,t') \in [0,1]^2 \quad |f(t) - f(t')| \leq k|t - t'|$$

1) Est-ce que l'application $f \mapsto k(f)$ est une norme sur E ?
2) Montrer que $f \mapsto |f(0)| + k(f)$ est une norme sur E.
3) On pose $N_1(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $N_2(f) = N_1(f) + k(f)$. Expliquer rapidement pourquoi N_1 et N_2 sont des normes. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 6: Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 7:
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrons qu'on peut en extraire une suite croissante ou une suite décroissante.
Indication : Introduire l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N}; \forall m \geq n \ u_m \geq u_n\}$$

et distinguer les cas où il est fini ou infini.
2) En déduire que si elle est bornée on peut en extraire une suite convergente.

Exercice 8:
1) Montrer que si A est une partie fermée d'un espace vectoriel normé et si x est un élément de E tel que $d(x,A) = 0$ alors x appartient à A.
2) Montrer la réciproque : Si $d(x,A) = 0$ implique que x appartient à A alors A est fermée.

Exercice 9: Si E et F sont deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ toute application continue f de E vers F vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ est linéaire.

Exercice 10: E est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, g est un élément de E. A toute application f de E on associe $N_g(f) = \sup\{|f(x)g(x)|; x \in [0,1]\}$.
1) A quelle condition sur g l'application N_g est-elle une norme ?
2) On suppose que g ne s'annule en aucun point. Comparer N_g avec la norme N, définie par $N(f) = \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$.
3) Même question si g s'annule au moins en un point.

Exercice 11:
1) Montrer qu'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est dense ou de la forme $a\mathbb{Z}$.
2) En déduire que l'ensemble des périodes d'une fonction continue non constante est de la forme $T\mathbb{Z}$, $T > 0$.
3) Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, puis que les ensembles $\{\sin n; n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\cos n; n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1,1]$.