Suites et séries de fonctions

Exercice 1: Etudier les séries de fonctions suivantes en précisant les domaines de convergence simple, normale, uniforme. Dans un deuxième temps étudier la continuité et la dérivabilité de la somme de la série.

1. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.
2. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$.
3. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = nxe^{-nx}\sin x$.
4. $\mathbb{R}^{*+}$, $f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} nx}$. Déterminer les limites de la somme aux bornes de l'intervalle de convergence. Chercher ensuite des équivalents de la somme aux bornes de cet intervalle.
5. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$.
6. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}$.
7. $\mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n^2+1}$.
8. $\mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. Déterminer la limite de la somme en $+\infty$, puis un équivalent de cette somme, puis son développement asymptotique à l'ordre $\frac{1}{x^2}$.

Exercice 2: Soit P_n une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g. Montrer que g est polynomiale et que pour n assez grand f_n et g ne diffèrent que d'une constante ($f_n - g$ est une fonction constante).

Exercice 3: Montrer que le produit de Cauchy de deux séries de fonctions qui convergent normalement converge normalement.

Exercice 4: Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Exercice 5: Condition suffisante sur α et β réel pour que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \sin(\beta^n x)$ soit de classe $\mathcal{C}^p$?

Exercice 6: Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes telles que les séries $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ et $\sum_{n\geq 1} |b_n|$ soient convergentes.

1) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et 2π-périodique.

2) Calculer $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$ et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$.

3) Donner une condition suffisante pour que f soit de classe $\mathcal{C}^p$.

4) Calculer, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $a_n(f')$ et $b_n(f')$ à l'aide de $a_n(f)$ et $b_n(f)$. En déduire une condition nécessaire pour que f soit de classe $\mathcal{C}^p$.

Exercice 7: On pose $f_n(t) = \operatorname{th}(n+t) - \operatorname{th}(n)$.

1) Etudier la convergence simple de cette série de fonctions.

2) Montrer que la somme de cette série de fonctions est une fonction croissante.

3) Etudier la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n$.

4) Etudier la continuité de $s = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

5) Etudier la série de terme général $1 - \operatorname{th} n$.

6) Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}$

$$s(t+1) = s(t) + 1 - \operatorname{th} t.$$

Exercice 8: *Théorème de Dini*

Si une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles est croissante et converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme.

Exercice 9: *Deuxième théorème de Dini*

Si une suite de fonctions croissantes sur $[a, b]$ à valeurs réelles converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme.