Algèbre linéaire

Pour commencer un exercice ultra-classique, probablement déjà vu pour ce qui est des premières questions. A traiter avec tonicité, dynamiste et rapidité.

Exercice 1: *Itérés d'un endomorphisme*
u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
1) Montrer Ker $u^p \subset$ Ker u^{p+1}.
2) Montrer Im $u^p \supset$ Im u^{p+1}.
3) Montrer que Im $u^p =$ Im $u^{p+1} \Leftrightarrow$ Ker $u^p =$ Ker u^{p+1}.
4) Montrer que Im $u^p =$ Im u^{p+1} implique Im $u^{p+1} =$ Im u^{p+2}. Etablir un résultat similaire avec les noyaux. Montrer qu'un tel p existe et que le plus petit est inférieur ou égal à n.
5) On suppose Im $u^p =$ Im u^{p+1}, prouver : $E =$ Ker $u^p \oplus$ Im u^p et u réalise un isomorphisme de Im u^p sur lui-même.
6) Soit p un entier quelconque, déterminer le noyau et l'image de la restriction de u à Im u^p, en déduire l'inégalité :

$$\dim \text{Im } u^p - \dim \text{Im } u^{p+1} \leq \dim \text{Ker } u \quad .$$

7) En considérant maintenant la restriction à Ker u^{p+1} obtenir l'inégalité similaire :

$$\dim \text{Ker } u^{p+1} - \dim \text{Ker } u^p \leq \dim \text{Ker } u \quad .$$

8) Désignons par F_p un supplémentaire de Im u^p dans Im u^{p-1}. Montrer que Im u^p est la somme de Im u^{p+1} et de $u(F_p)$. En déduire l'inégalité

$$\dim \text{Im } u^p - \dim \text{Im } u^{p+1} \leq \dim \text{Im } u^{p-1} - \dim \text{Im } u^p \quad .$$

Retrouver ainsi le résultat d'une question précédente.

Exercice 2: *(Mines)* Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
1) Soit A un sous-espace de E de dimension a. Montrer que $\alpha = \{u \in L(E), A \subset \text{Ker } u\}$ et $\beta = \{u \in L(E), u(A) \subset A\}$ sont des sous-espaces vectoriels et donner leurs dimensions.
2) Soient F et G deux sous-espaces de E. On note f, g et h les dimensions respectives de F, G et $F \cap G$. Déterminer la dimension de

$$\{u \in L(E), u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}.$$

Exercice 3: *(Mines, posé à l'X la même année (2016))* Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation

$$X + {}^tX = \text{tr}\,(X)A$$

Remarque : on ne compte plus les exercices dans la même veine : résoudre $M = \text{tr}\,(M)A + B$ (discuter sur A et B), $\text{tr}\,(A)M + \text{tr}\,(M)A = \lambda M$ (discuter sur A et λ).

Exercice 4: *(Mines)* Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur $\mathbb{K}$ et d dans $\{0, \ldots, n-1\}$. Déterminer les endomorphismes stabilisant tous les sous-espaces de dimension d.
Indication : Commencer par le cas $d = 1$ (**Exercice ARCHI-CLASSIQUE**).
Utiliser ensuite, après l'avoir démontré, le fait que tout sous-espace de dimension $d-1$, est l'intersection de deux sous-espaces de dimension d, pour raisonner par récurrence.

Exercice 5: *(Mines)* Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, B de rang 1. Montrer que

$$\det(A+B)\det(A-B) \leq (\det A)^2.$$

Exercice 6: *(Mines)* Soit E un espace vectoriel et S une partie de $L(E)$. On dit que S est dense dans $L(E)$ si, pour tout ensemble fini I et tout couple de familles libres de vecteurs de E, $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ indexées par I, il existe f dans S tel que $\forall i \in I\ f(u_i) = v_i$.
1) On suppose E de dimension finie, montrer que S est dense si et seulement si S contient $GL(E)$.
2) Montrer que l'ensemble des endomorphismes de rang fini est dense.
3) Déterminer le commutant d'une partie dense.

Exercice 7: *(Centrale)* Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
1) Pour w dans $GL(E)$, montrer que $u \mapsto w \circ u \circ w^{-1}$ est un morphisme d'algèbre.
2) Montrer que les idéaux bilatères de $L(E)$ sont $\{0\}$ et $L(E)$.
3) En déduire que les automorphismes d'algèbre de $L(E)$ sont ceux déterminés à la première question.

Exercice 8: *(Polytechnique)* Soit $(V_1, \dots, V_p)$ des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ dont la réunion est $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'un d'entre eux est égal à $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9: *(Polytechnique)* Soit n dans $\mathbb{N}^*$, T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $T(P) = P(X+1)$ et D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $D(P) = P'$.
1) Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec T.
2) Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui commutent avec T.

Exercice 10: *(Polytechnique)* Montrer que tout élément de $L(M_n(\mathbb{K}))$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui conserve le déterminant conserve le rang.

Exercice 11: *(Polytechnique)* Soit $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante, telle que $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.
1) Décrire $\phi^{-1}(\{0\})$.
2) Montrer qu'il existe $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(A) = \psi(\det(A)$, pour tout A de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12: *(Polytechnique)* Soit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ des nombres réels. Montrer que le déterminant de la matrice $(e^{a_i b_j})_{1\leq i,j\leq n}$ est strictement positif.

Exercice 13: *(Polytechnique)* Déterminer les u dans $L(M_n(\mathbb{R})$ tels que $\forall M \in L(\mathbb{R}^n)$, ${}^t(u(M)) = u({}^tM)$.

Exercice 14: *(ENS)* Montrer qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Exercice 15: *(ENS)* Dans $\mathbb{R}_n$, on considère $Z = (\{0,1\})^n$. Si V est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, on note $Z(V)$ le cardinal de $Z \cap V$.
1) Si $0 \leq k \leq n$ calculer le minimum de $Z(V)$ lorsque V parcourt les sous-espaces de dimention k.
2) Si $0 \leq k \leq n$ calculer le maximum de $Z(V)$ lorsque V parcourt les sous-espaces de dimention k.

Exercice 16: *(ENS)* Soit A l'anneau $\mathbb{C}[X_{1,1}, X_{1,2}, X_{2,1}, X_{2,2}]$ et $M = (X_{i,j})$ dans $M_2(A)$. On pose $M^2 = (P_{i,j})$, $T = \mathrm{tr}\,(M)$, $D = \det(M)$. Soit I l'idéal engendré par les $P_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq 2$.
1) Montrer que I est contenu dans l'idéal engendré par T et D.
2) Montrer qu'il existe un k dans $\mathbb{N}^*$ tel que T^k et D^k sont dans I.

Exercice 17: *(ENS)* Soit $\mathbb{K}$ un corps et A une matrice dans $M_n(\mathbb{K})$.
1) Combien faut-il changer au minimum de coefficients de A pour obtenir une matrice inversible ?
2) Combien faut-il changer au minimum de coefficients de A pour obtenir une de rang $\mathrm{rg}\,(A) - 1$?

Exercice 18: *(ENS)* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. décrire les matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.