Probabilités

Exercice 1: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé tel que pour tout élément A de $\mathcal{A}$ non vide $P(A) > 0$. On définit la différence symétrique de deux parties A et B de Ω par

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

1) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par Δ.
2) Montrer que $(A, B) \mapsto P(A\Delta B)$ est une distance sur $\mathcal{A}$.
3) Etablir, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{A}$:

$$|P(A) - P(B)| \leq P(A\Delta B).$$

Exercice 2: On lance n fois une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir PILE est p, $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$; on la relance autant de fois qu'on a obtenu de PILE. Soient X et Y le nombre de PILE obtenus respectivement lors de la première série et de la deuxième série de lancers.
1) Donner la loi de X, sans justification.
2) Donner la loi de Y.
3) Donner le nombre moyen de PILE obtenus sur l'ensemble des deux lancers.

Exercice 3: Une urne contient 1 boule rouge et une boule blanche. On effectue une suite de tirages de la manière suivante : on tire une boule au hasard dans l'urne puis on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de la même couleur. On considère la variable aléatoire X_n donnant le nombre de boules blanches obtenues durant les n premiers tirages.
1) Déterminer les lois de X_1 et de X_2.
2) Montrer que X_n suit une loi uniforme sur $[0, n]$.

Exercice 4: On définit $B(\alpha, \beta, x)$ et $B(\alpha, \beta)$ pour $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$, entiers, et $p \in]0, 1[$ par

$$B(\alpha, \beta, x) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt \quad B(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta, 1).$$

1) Calculer $B(\alpha, 1, x)$.
2) Pour $\beta > 1$ obtenir une relation entre $B(\alpha, \beta, x)$ et $B(\alpha + 1, \beta - 1, x)$
3) Que devient cette relation pour $x = 1$.
4) En déduire la valeur de $B(\alpha, \beta)$ à l'aide de la fonction factorielle.
5) Montrer que

$$\sum_{k=r+1}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{B(r + 1, n - r, p)}{B(r + 1, n - r)}.$$

Indication : Récurrence descendante.

Exercice 5: Une urne contient b boules blanches, n boules noires, r boules rouges ; b et n sont des entiers naturels non nuls fixés, r est un entier naturel variable.
Un joueur tire une boule. Si elle est blanche il gagne ; si elle est noire il perd ; si elle est rouge il la met de côté et effectue un autre tirage. Il continue ainsi jusqu'à ce qu'il ait gagné ou perdu.
1) On note $B_{i,r}$ (resp. $N_{i,r}$, $R_{i,r}$) l'évènement : « le joueur tire une boule blanche (resp. une boule noire, une boule rouge) au i-ème coup et il reste r boules rouges avant ce tirage ».
On note G_r l'évènement : « le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges ».

a) Calculer les probabilités $p(G_0)$ et $p(G_1)$.
b) Trouver une relation entre $p(G_r)$ et $p(G_{r-1})$.
c) Calculer $p(G_r)$.

2) Soit X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève, l'urne contenant au départ r boules rouges.

a) Calculer les espérances $E(X_0)$ et $E(X_1)$.
b) Trouver une relation entre $P(X_r = k)$ et $P(X_{r-1} = k-1)$ (pour $r \geq 1$ et $k \geq 2$), puis entre $E(X_r)$ et $E(X_{r-1})$.
c) En déduire $E(X_r)$

Quelques exercices de probabilité posés aux oraux des concours en 2016, dans la filière MP.

Ex 6: *Autres écoles MP 2016*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire donnant le rang du n-ième succès.
1) Expliciter la loi de T_1.
2) Déterminer la loi de T_n.

Ex 7: *C.C.S. MP 2016*
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ boules blanches et noires dans une urne. On note X_0 la variable aléatoire indiquant le nombre de boules blanches dans l'urne à l'instant initial. On suppose que X_0 suit une loi uniforme sur $[1, n]$. On effectue alors l'opération « tirage-remplacement »suivante. On tire deux boules de l'urne. Si elles sont de couleurs différentes, on les remet dans l'urne ; si elles ont la même couleur, on les remplace par une boule blanche et une boule noire. On itère ce « tirage-remplacement »et on note X_k la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches à l'issue de la k-ième opération.
1) En utilisant un argument de symétrie, montrer que l'espérance de X_k est constante.
2) On pose $U_k = {}^t(\mathbb{P}(X_k = 1), \ldots, \mathbb{P}(X_k = n))$. Construire A dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout k $U_{k+1} = AU_k$.
3) Montrer que la suite $(A^p)_{p\geq 0}$ est convergente.

Ex 8: *C.C.M. MP 2016*
Soit $n \geq 2$ un entier, on donne une matrice aléatoire M de $M_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, admettant une espérance. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ calculer l'espérance de $\chi_M(\lambda)$, χ_M désignant le polynôme caractéristique de M.

Ex 9: *X MP 2016*
Soit $n \geq 2$ un entier, X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[1, n]$. Montrer qu'il existe deux variables aléatoires indépendantes Y et Z définies sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, non certaines telles que $X \sim Y + Z$ si et seulement si n n'est pas premier.