Exercice 2 : deuxième démonstration de Cayley-Hamilton.

1) Dire que la matrice $(m_{i,j})$ de u est triangulaire supérieure veut dire $\forall j \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{j} m_{i,j} e_i$.

De plus pour tout j $\quad m_{j,j} = \lambda_j$ est une des valeurs propre de u.

On en déduit $\quad \forall j \geq 1, \ \forall i \leq j-1 \quad u(e_i) \in \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_i\} = F_i \subset F_{j-1}$.

donc $(u - \lambda_j Id_E)(e_i) \in F_{j-1}$

* Si $i = j$ $\quad (u - \lambda_j Id_E)(e_j) = \sum_{i=1}^{j-1} m_{i,j} e_i \in F_{j-1}$

En conclusion $\quad \forall j \geq 1 \ (u - \lambda_j Id_E)(F_j) \subset F_{j-1}$. (On rappelle $F_0 = \{0\}$)

2) On en déduit, par récurrence descendante sur i que

$$\left(\prod_{k=i}^{n} (u - \lambda_k Id_E)\right)(F_n) \subset F_{i-1}.$$

C'est vrai pour $i = n$ $\qquad (u - \lambda_n Id_E)(F_n) \subset F_{n-1}$

On suppose le résultat vrai à l'ordre i, $i \geq 2$.

$$\left[\prod_{k=i-1}^{n} (u - \lambda_k Id_E)\right](F_n) = (u - \lambda_{i-1} Id_E)\left(\left[\prod_{k=i}^{n} (u - \lambda_k Id_E)\right](F_n)\right)$$

$$\subset (u - \lambda_{i-1} Id_E)(F_{i-1})$$

$$\left[\prod_{k=i-1}^{n} (u - \lambda_k Id_E)\right](E) \subset F_{i-2}. \qquad \text{car } F_n = E$$

Pour $i = 1$ on obtient

$$\chi_u(u)(E) \subset F_0 = \{0\}$$

donc $\chi_u(u) = 0$

3) Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, c'est la matrice d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, dans une base adaptée $\mathcal{B}$ (par exemple la matrice de $X \mapsto MX$ dans la base canonique).

On a $\chi_M = \chi_u$ et puisque l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) &\to M_n(\mathbb{C}) \\ v &\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbre, on a.

$$\underline{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\chi_u(u)) = \chi_u(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \chi_M(M)}$$

Or $\underline{\chi_u(u) = 0}$ $\underline{\text{donc}}$ $\underline{\chi_M(M) = 0}$

Toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ pouvant être vu ~~pour~~ comme une matrice à coefficients complexes, le résultat précédent reste <u>vrai pour une matrice de $M_n(\mathbb{R})$</u>

4) Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, ~~noté~~ E, soit $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

Alors, d'après la remarque de la question précédente.

$$\underline{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\chi_u(u)) = \chi_u(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) = \chi_u(M) = \chi_M(M) = 0}$$

donc $\underline{\chi_u(u) = 0.}$

c'est le théorème de Cayley-Hamilton.