Partie II : Automorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$

Exercice 3

1) Il s'agit de vérifier. (1) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$

(2) $w(\lambda u + \mu v)w^{-1} = \lambda(w u w^{-1}) + \mu(w v w^{-1})$

et

(3) $w(uv)w^{-1} = (w u w^{-1})(w v w^{-1})$

et

(4) $w(Id_E)w^{-1} = Id_E$

Ceci résulte immédiatement de la structure d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

$\Phi_w \circ \Phi_{w^{-1}} = \Phi_{w^{-1}} \circ \Phi_w = Id_{\mathcal{L}(E)}$, donc Φ_w est bijectif.

2) L'application qui à un endomorphisme de E associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme. L'existence et l'unicité de $u_{i,j}$ en résulte

3) $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$. En utilisant l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme de la question précédente, on peut affirmer que $(u_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

Puisque que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels (en particulier) il en résulte que $(v_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$

On a la relation bien connue $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

En appliquant successivement les deux isomorphismes dont on parlait auparavant, il vient :

$$\forall (i,j,k,l) \quad v_{i,j}v_{k,l} = \delta_{j,k}v_{i,l}.$$

En particulier $\forall i \quad v_{i,i}v_{i,i} = v_{i,i}$, donc

$\forall i \quad p_i = v_{i,i}$ est un projecteur.

Il est non nul car $E_{i,i} \neq 0$ et l'image par des isomorphismes d'un élément non nul est non nul.

4) Or a $I_r = \sum_{i=1}^{n} E_{i,i}$ donc $Id_E = \sum_{i=1}^{r} u_{i,i}$

puis en appliquant Φ : $\sum_{i=1}^{n} p_i = Id_E$.

Donc $E = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i$ $\quad (\forall x \in E \quad x = \sum_{i=1}^{n} p_i(x))$

De plus $\operatorname{Im} p_i \cap (\sum_{j \neq i} \operatorname{Im} p_j) = \{0\}$

en effet $\begin{cases} \text{si } y \in \operatorname{Im} p_i & p_i(y) = y \\ \text{si } y \in \sum_{j \neq i} \operatorname{Im} p_j & y = \sum_{j \neq i} x_j = \sum_{j \neq i} p_j(x_j) \end{cases}$

et

(car $x_j \in \operatorname{Im} p_j \Rightarrow x_j = p(x_j)$).

Donc si $y \in \operatorname{Im} p_i \cap (\sum_{j \neq i} \operatorname{Im} p_j)$

$$y = p_i(y) = \sum_{j \neq i} (p_i \circ p_j)(x_j) = 0$$

Car $p_i \circ p_j = v_{i,i} \circ v_{j,j} = \delta_{i,j} v_{i,j}$

les $\operatorname{Im} p_i$ sont donc en somme directe et

$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} p_i$. Or $\dim \operatorname{Im} p_i \geq 1$.

et $\dim E = n = \sum_{i=1}^{n} \dim(\operatorname{Im} p_i)$

donc $\forall i \ \dim \operatorname{Im} p_i = 1$.

Il existe donc $f_i \neq 0$ tel que $\operatorname{Im} p_i = \mathbb{K} f_i$

et puisque $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K} f_i$ la famille $(f_1, f_2, \quad , f_r)$ est une base de E.

5) On a $v_{i,j}(f_k) = \alpha_{i,j,k} f_i$ car

$v_{i,j} = v_{i,i} v_{i,j}$ donc $\mathrm{Im}\, v_{i,j} \subset \mathrm{Im}\, v_{i,i} = \mathbb{K} f_i$

De plus $v_{i,j}(f_k) = v_{i,j}(v_{k,k}(f_k)) = (v_{i,j} v_{k,k})(f_k)$

Donc si $k \neq j$ $v_{i,j}(f_k) = 0$

si $k = j$ $v_{i,j}(f_j) = \alpha_{i,j} f_i$

6) $(v_{i,j} v_{j,k})(f_k) = v_{i,k}(f_k) = \alpha_{i,k} f_i$

$v_{i,j}(v_{j,k}(f_k)) = \alpha_{i,k} f_i$

$v_{i,j}(\alpha_{j,k} f_j) = \alpha_{i,k} f_i$

$\alpha_{j,k} v_{i,j}(f_j) = \alpha_{i,k} f_i$

$\alpha_{j,k} \alpha_{i,j} f_i = \alpha_{i,k} f_i$

et puisque $f_i \neq 0$ $\alpha_{i,j} \alpha_{j,k} = \alpha_{i,k}$.

7) $v_{i,i}(f_i) = f_i$ donc $\alpha_{i,i} = 1$ pour tout i

donc pour tout (i,j) $\alpha_{i,j} \alpha_{j,i} = 1$ et

en particulier $\forall i,j$ $\alpha_{i,j} \neq 0$.

En fixant k à 1 dans la relation obtenue à la question 6) on obtient

$$\forall i,j \quad \alpha_{i,j} = \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{j,1}} = \frac{\beta_i}{\beta_j}$$ en posant $\beta_i = \alpha_{i,1}$.

8) Posons $\forall i$ $\varepsilon_i = \beta_i f_i$, alors

$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E et

$\forall i,j$ $v_{i,j}(\varepsilon_j) = \beta_j v_{i,j}(f_j) = \beta_j \frac{\beta_i}{\beta_j} f_i = \beta_i f_i = \varepsilon_i$

et si $k \neq j$ $v_{i,j}(\varepsilon_k) = \beta_k v_{i,j}(f_k) = 0$

On a donc bien prouvé

$$\forall i, j, k \qquad v_{i,j}(\varepsilon_k) = \delta_{j,k}\, \varepsilon_i$$

9). Soit w l'application linéaire transformant la base $(e_1, \dots, e_n)$ en $(\varepsilon_1, \quad, \varepsilon_n)$. Puisque $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E, w est un isomorphisme.

$$\forall i, j \ \forall k \qquad (w\, u_{i,j}\, w^{-1})(\varepsilon_k) = w\left(u_{i,j}\left(w^{-1}(\varepsilon_k)\right)\right)$$

$$= w\left(u_{i,j}(e_k)\right)$$

$$= \delta_{j,k}\, w(e_i)$$

$$= \delta_{j,k}\, \varepsilon_i$$

$$\forall (i,j,k) \qquad (w\, u_{i,j}\, w^{-1})(\varepsilon_k) = v_{i,j}(\varepsilon_k)$$

Donc $\forall i, j \qquad w\, u_{i,j}\, w^{-1} = v_{i,j}$

$$\forall i, j \qquad \Phi_w(u_{i,j}) = \Phi(u_{i,j})$$

Φ_w et Φ sont deux applications linéaires égales sur une base donc $\Phi_w = \Phi$

q.e.d.