Partie III : exercices supplémentaires

Exercice 4. On ne perd pas en généralité en supposant que la première colonne de B est non nulle.

Notons $A_1, \quad , A_n$ les colonnes de A

$B_1, \quad , B_n$ les colonnes de B

Il existe $(c_2, \quad , c_n)$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\forall j \geq 2 \quad B_j = c_j B_1$.

Soit $\varepsilon = \pm 1$

$\det(A + \varepsilon B) = \det(A_1 + \varepsilon B_1, A_2 + \varepsilon B_2, \quad , A_n + \varepsilon B_n)$

On ne change pas ~~la dernière colonne en~~ le déterminant en remplaçant $A_j + \varepsilon B_j$ par $(A_j + \varepsilon B_j) - c_j(A_1 + \varepsilon B_1)$ pour j croissant de 2 à n.

$\det(A + \varepsilon B) = \det(A_1 + \varepsilon B_1, A_2 - c_2 A_1, \quad , A_n - c_n A_1)$

$\det(A + \varepsilon B) = \det(A_1, A_2 - c_2 A_1, \quad , A_n - c_n A_1) + \varepsilon \det(B_1, A_2 - c_2 A_1, \quad , A_n - c_n A_1)$

(linéarité par rapport au premier vecteur)

En remplaçant dans le premier déterminant $A_j - c_j A_1$ par $(A_j - c_j A_1) + c_j A_1$. on ne change pas la valeur du déterminant et on obtient

$$\det(A + \varepsilon B) = (\det(A)) + \varepsilon \underbrace{\det(B_1, A_2 - c_2 A_1, \quad , A_n - c_n A_1)}_{= K.}$$

donc $\det(A+B)\det(A-B) = (\det A)^2 - K^2 \leq (\det A)^2$

Exercice 5

1) + Supposons S dense. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ , e_n)$ une base de E. Soit f dans $GL(E)$, alors $(f(e_1), \ , f(e_n))$ est libre. Il existe donc g dans S tel que $\forall i \ g(e_i) = f(e_i)$. f et g sont égaux sur une base et linéaires, il sont égaux donc $f = g$, $f \in S$.

En conclusion $GL(E) \subset S$

+ Réciproquement supposons $GL(E) \subset S$

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles libres. On peut les completer en deux bases $(u_i)_{i \in J}$ et $(v_i)_{i \in J}$ où $I \subset J$ et $\operatorname{card} J = \dim E$.

Il existe un unique élément f de $\mathcal{L}(E)$ tel que $\forall i \in J \ f(u_i) = v_i$

Or $(v_i)_{i \in J}$ est une base donc $f \in GL(E)$, et par conséquent $f \in S$. et $\forall i \in I \quad f(u_i) = v_i$

2) - Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles libres finies de E. Il existe une application linéaire $f : F = \operatorname{Vect}\{u_i, i \in I\} \to E$ telle que $\forall i \ f(u_i) = v_i$

- Soit S un supplémentaire de F. On peut définir une unique application linéaire $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f}_{|F} = f$ $\tilde{f}_{|S} = 0$.

$\operatorname{Im} \tilde{f} = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{v_i, i \in I\}$, donc $\tilde{f}$ est de rang fini et $\forall i \in I \ f(u_i) = v_i$.

$\forall (u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ libres finies, il existe $\tilde{f}$ de rang fini tel que $\forall i \ \tilde{f}(u_i) = v_i$. Donc l'ensemble des endomorphismes de rang fini est dense.

3) + Il est clair que tout homothétie commute avec tout élément de S si S est dense.

+ Si f n'est pas une homothétie il existe x tel que $(x, f(x))$ est libre. Alors $(-x, f(x))$ est aussi libre donc il existe g dans S tel que $g(x) = -x \quad g(f(x)) = f(x)$

Alors $(g \circ f)(x) = f(x)$ et $(f \circ g)(x) = f(-x) = -f(x) \neq f(x)$, car $f(x) \neq 0$. Par conséquent $f \circ g \neq g \circ f$ et f n'appartient pas à $\mathcal{C}(S)$

Exercice 6

On démontre le résultat par récurrence sur la dimension, égale à n, d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque.

. Si $n = 0$ $E = \{0\}$, $p \geq 1$ sinon l'union est vide, et $\exists i$ $V_i = \{0\}$ (car $\forall i$ $V_i = \{0\}$).
le résultat est vrai.

. Soit E un espace de dimension n, $n \geq 1$, et supposons le résultat vrai ~~...~~ pour la dimension $n-1$.

*Si l'un des V_i est E le résultat est prouvé.

*Montrons que dans l'autre cas ($\forall i$ $V_i \neq E$) on aboutit à une contradiction.

Soit H un hyperplan de E.

$$H = H \cap E = H \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} V_i\right) = \bigcup_{i=1}^{p} \underbrace{(H \cap V_i)}_{V_i'}$$

$\forall i$ V_i' est un sous espace de H et $\dim H = n-1$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence

$\exists i$ $H = V_i$

Pour tout hyperplan de E il existe i tel que $H = V_i$

Or $\{V_i\}$ est fini et si $\dim E \geq 2$ l'ensemble des hyperplans est infini. En effet soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $H_\lambda = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1} + \lambda e_n\}$ est un hyperplan et si $\lambda \neq \mu$ $H_\lambda \neq H_\mu$ car $e_{n-1} + \mu e_n \notin H_\lambda$.

On obtient bien une contradiction (si $\dim E \geq 2$).

Si $\dim E = 1$ et $\forall i$ $V_i \neq E$ alors $\forall i$ $V_i = \{0\}$ et $\bigcup_{i=1}^{n} V_i \neq E$, on obtient bien aussi une contradiction.

Exercice 7 :

Lemme : si $\dim E = n$ et si u est nilpotent d'indice de nilpotence n alors $\mathcal{E}(u) = \mathbb{K}[u]$.

Démonstration du lemme :

L'inclusion $\mathbb{K}[U] \subset \mathcal{E}(U)$ résulte de la commutativité de $\mathbb{K}[U]$

Réciproquement Soit v dans $\mathcal{E}(U)$. Il existe x dans E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. On montre (exercice classique) que $(x, u(x), \quad , u^{n-1}(x))$ est libre, puis, pour des raisons de cardinal une base de E.

Il existe donc $(a_0, \quad , a_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ $v(x) = a_0 x + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x)$

$\forall k$. $v(u^k(x)) = u^k(v(x)) = a_0 u^k(x) + \dots + a_{n-1} u^{k+n-1}(x)$

$v(u^k(x)) = (a_0 \mathrm{Id}_E + \quad + a_{n-1} u^{n-1})(u^k(x))$

v et $\sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i$ sont égaux sur une base, ils sont donc égaux et par conséquent $v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i \in \mathbb{K}[U]$

1) $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P'$ est nilpotent d'indice $(n+1)$ car

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ $D^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$ et $D^n(X^n) = n! \neq 0$.

Donc $\mathcal{E}(D) = \mathbb{R}[D]$ ($= \mathbb{R}_n[D]$ car $D^{n+1} = 0$)

2) $T = \Delta + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc $\mathcal{E}(T) = \mathcal{E}(\Delta)$.

Or Δ est nilpotent d'indice $n+1$ car.

$\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$ si $\deg P \geq 1$

$\deg \Delta(c) = 0$ si $c \in \mathbb{R}$

Donc. $\Delta^n(X^n) \neq 0$ et $\Delta^{n+1}(P) = 0$ pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par conséquent $\mathcal{E}(T) = \mathcal{E}(\Delta) = \mathbb{R}[\Delta]$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Or } \mathbb{R}[\Delta] \subset \mathbb{R}[T] \text{ car } \Delta = T - \mathrm{Id} \\ \text{et } \mathbb{R}[T] \subset \mathbb{R}[\Delta] \text{ car } T = \Delta - \mathrm{Id}.\end{array}\right\} \cdot \mathbb{R}[\Delta] = \mathbb{R}[T]$$

Finalement $\mathcal{E}(T) = \mathbb{R}[T]$

Exercice 8 (La première indication donnée n'est d'aucune utilité) je l'ai supprimée et remplacée). 13

- Montrons que f est injective. Commençons par remarquer que f transforme toute matrice inversible en une matrice inversible, puisqu'elle conserve les déterminants non nuls.
Soit M telle que $f(M)=0$. Supposons M non nulle.
Alors $M = P\begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$ avec P et Q inversibles et $r \geq 1$
Prenons $A = PQ = P I_n Q$. A est inversible donc $f(A)$ est inversible. $A - M = P\begin{pmatrix} 0 & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix}Q$ est non inversible donc $f(A-M) = f(A) - f(M) = f(A)$ est non inversible. Contradiction

f est injective et c'est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie. Donc est bijective et en particulier surjective.

- $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ $\det(A+tB) = \det(f(A+tB)) = \det(f(A)+t f(B))$

- $B = P J_r Q$. $A = PA'Q$ $\det(A+tB) = \det P \det Q \det(A'+t J_r)$
Il est clair $\det(A'+tJ_r)$ est un polynôme de degré au plus r.
(Utiliser la linéarité par rapport à chacune des r première colonnes de $A'+tJ_r$, par exemple)
et si on prend $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_{n-r} \end{pmatrix}$ $\det(A'+tJ_r) = t^r$.

- Soit B de rang r et r' le rang de $f(B)$.
Si on choisit A tel que $\det(A+tB)$ soit de degré r on obtient $r = \deg \det(f(A)+tf(B)) \leq r'$.
si on choisit A tel que $f(A)$ est telle que $\deg \det(f(A)+tf(B)) = r'$
(ce qui est possible car f est surjective)
$r' = \deg \det(f(A)+tf(B)) = \deg \det(A+tB) \leq r$.

Finalement $r = r'$ et f conserve le rang.

Exercice 9: Comme indiqué on démontre le résultat par récurrence sur n. (14)

- Pour $n=1$. $D(a_1, b_1) = e^{a_1 b_1} > 0$ le résultat est vrai.
- On suppose le résultat vrai à l'ordre $n-1$, avec $n \geq 2$.

$D(a_1, \quad , a_n, b_1, \quad , b_n) = f(b_n)$ où $f(x) = D(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}, x)$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière colonne.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} e^{a_i x} D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b_1, \quad , b_{n-1})$$

Or $a_1 < a_2 < a_3 \quad < a_n$. donc.

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} D(a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}) e^{a_n x} > 0$$

En particulier $f(x) > 0$ ~~quand~~ x est au voisinage de $+\infty$.

On a $f(b_1) = \quad = f(b_{n-1}) = 0$ (deux colonnes égales)

et f est de la forme $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{a_i x}$, où les α_i sont réels et $\alpha_n \neq 0$. et les a_i distincts.

Montrons par récurrence sur n qu'une telle fonction ne peut s'annuler ~~plus de~~ en plus de $n-1$ points distincts.

Cela est vrai si $n=1$ car $f(x) = \alpha_1 e^{a_1 x}$ avec $\alpha_1 > 0$ ne peut s'annuler.

On suppose le résultat vrai à l'ordre $(n-1)$.

Si f s'annule en au moins n points, alors $g : x \mapsto e^{-a_1 x} f(x)$ aussi avec $g(x) = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i e^{(a_i - a_1)x}$. Or g est de classe C^1 et à valeurs réelles. Le théorème de Rolle permet d'affirmer que $g' : x \mapsto \sum_{i=2}^{n} \alpha_i (a_i - a_1) e^{(a_i - a_1)x} = \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i e^{c_i x}$

où $\beta_{n-1} \neq 0$ et les c_i sont distincts s'annule $n-1$ fois. ce qui est impossible. le résultat est bien vrai à l'ordre n.

Donc f ne peut s'annuler sur $]b_{n-1}, +\infty[$ et $f(b_n)$ est du même signe que celui de f au voisinage de $+\infty$.

Donc $f(b_n) > 0$ et ceci prouve notre résultat.