Les polynômes de Tchebychev

1) Soit n un entier, montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que pour tout x réel

$$T_n(\cos x) = \cos nx.$$

2) Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant. On note a_n ce coefficient dominant et on pose $P_n = \frac{1}{a_n} T_n$.

3) Montrer que P_n possède n zéros distincts que l'on explicitera.

4) Calculer $b_n = \sup_{x\in[-1,1]} |P_n(x)|$.

5) Montrer que la valeur b_n est atteinte par $|P|$ sur $[-1,1]$ en p (p à préciser) points $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$. Que vaut $P_n(y_i)$?

6) Soit Q un polynôme unitaire de degré n. On suppose $\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)| < b_n$. En calculant le signe de $(P_n - Q)(y_i)$ montrer que $P_n = Q$. Conclure.

7) Pour quel choix de $x_0, \ldots, x_n$ dans $[-1,1]$

$$\sup_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

est-il minimal. Quelle est alors sa valeur ?

Ne répondre qu'à l'une des deux questions suivantes, celle qui présente une autre méthode de justification de l'existence de T_n que celle que vous avez employée à la première question.

8) (indépendante) Exprimer explicitement T_n en utilisant les formules d'Euler. En déduire une expression des coefficients de T_n sous forme de sommes et de coefficients binomiaux.

9) (indépendante) Montrer que (T_n) vérifie la relation de récurrence $T_{n+2} - 2XT_{n+1} + T_n(X) = 0$. Retrouver alors le résultat de la question 2. Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5.

10) (indépendante) Montrer que T_n est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre et que tout polynôme solution de cette équation est proportionnel à T_n. En déduire par identification des coefficients le polynôme T_6. Plus généralement donner l'expression des coefficients de T_n.

Les polynômes T_n s'appellent les polynômes de Tchebychev de première espèce. On pourrait définir les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce à l'aide de la relation :

$$\forall\theta\in\mathbb{R} \quad \sin((n+1)\theta) = (\sin\theta)\, S_n(\cos\theta).$$

Vous pouvez reprendre les questions 1, 2, 3, 8, 9 *et* 10, *pour cette famille de polynômes.*
Dans l'optique de la deuxième épreuve orale de Centrale-Supélec vous pouvez aussi programmer en Python le calcul de T_n par une, deux ou trois des méthodes exposées aux questions 8, 9 *et* 10.