

III.A.1)  $F_n$  est une fraction rationnelle à pôles simples et degré négatif, elle se décompose donc sous la forme

$$F(x) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{x-i} \quad \text{avec} \quad a_i = F(x)(x-i) \Big|_{x=i}$$

$$a_i = \frac{n!}{i(i-1)\dots 1 \times -1 \times -2 \times \dots \times (i-i)} = \frac{n! (-1)^{n-i}}{i! (n-i)!}$$

$$F(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{1}{x-i}$$

III.A.2)  $A_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1)(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! re^{it} f(re^{it})}{re^{it}(re^{it}-1)(re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi}$

$$A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{re^{it} f(re^{it})}{(re^{it}-1)(re^{it}-k)} \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

(d'après II.A.2)  
(car  $r > |k|$ )

III.A.3) Il en résulte, à l'aide de l'inégalité triangulaire.

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! |f(re^{it})|}{|re^{it}-1| \cdot |re^{it}-n|} \frac{dt}{2\pi}$$

Or  $\forall x \in [-\pi, \pi] \quad |f(re^{it})| \leq M_f(r) \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, n] \quad |re^{it}-1| \geq |re^{it}-k| \geq r-k$

Puis

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leq \frac{n! M_f(r)}{(r-1)(r-n)}$$

III. B. 1) On choisit  $n = 2n+1$ .

(11)

$$\left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \leq \frac{n!}{(2n)!} M_f(2n+1) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \Pi_f(2n+1)$$

On utilise la formule de Stirling, on en déduit

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2}{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n}} \quad , \quad \text{Or } \Pi_f(2n) = O\left(\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}\right)$$
$$\Pi_f(2n+1) = O\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\right)$$

Par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) = 0$

Or  $\forall k \in \mathbb{N} \quad f(k) \in \mathbb{Z}$ , donc  $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \in \mathbb{Z}$

Par conséquent  $\exists N \quad \forall n \geq N \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) = 0$

III. B. 2) D'après I. D) il existe donc un polynôme

$P$  tel que  $\forall k \in \mathbb{N} \quad f(k) = P(k)$

- Or  $f \in E_\infty \quad P \in E_\infty$  et  $\forall k \in \mathbb{N} \quad (f-P)(k) = 0$

Donc d'après II. E)  $f-P=0$

et  $f = P$  est un polynôme