ENS MPI 2018 Mathématiques D

I. Existence et unicité d'une meilleure approximation.

I.1) $\| \ \|_I$ est 1-lipschitzienne donc continue. Il en est donc aussi de même de $\varphi : g \mapsto \| f-g \|_I$. $C = \varphi^{-1}([0, 1+m])$, image réciproque d'un fermé est donc fermé.

- De plus $\forall g \in C \quad \|g\| \leq \|f-g\| + \|f\| \leq 1 + m + \|f\|$

Donc C est borné

C est fermé et borné, $\mathbb{R}_r[X]$ est de dimension finie, donc C est compact. De plus $C \neq \emptyset$ car $1+m > m$, donc d'après la caractérisation de la borne ~~sup~~ inférieure il existe g tel que $\|f-g\| \leq 1+m$.

I.2) C est compact, non vide et φ est continue, donc φ atteint un minimum sur C. De plus $\min_C \varphi \leq 1+m$ et $\forall g \notin C \quad \|f-g\| > 1+m$.

Donc $\min_C g = \min_{\mathbb{R}_n[X]} g = \inf_{\mathbb{R}_r[X]} g = m$.

et par conséquent $m = \|f-p\|$ pour un p dans $\mathbb{R}_r[X]$

I.3) On peut prendre par exemple pour q le polynôme d'interpolation de Lagrange.

$$q = \sum_{j=1}^{k} f(x_j) \prod_{i \neq j} \frac{(X-x_i)}{(x_j-x_i)}$$

I.4) f-q est continue en chaque x_i, donc pour $\varepsilon > 0$, pour tout i, il existe $\delta_i > 0$ tel que $\forall x \ |x-x_i| < \delta_i \ |(f-q)(x) - (f-q)(x_i)| < \varepsilon$

Or $(f-q)(x_i) = 0$. Donc $\forall x \ |x-x_i| < \delta_i \quad |f(x) - q(x)| < \varepsilon$.

Il suffit alors de prendre $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \delta_i > 0$

I.5) On écrit $f(x) = (1-t)f(x) + t f(x)$

Si $x \in U_\delta$ $\quad |f(x) - p_t(x)| \leq (1-t)|f(x) - p(x)| + t|f(x) - q(x)|$

$$\leq (1-t)\|f-p\|_I + t \sup_{x \in U_\delta} |f(x) - q(x)|$$

$$|f(x) - p_t(x)| \leq (1-t)m + t\varepsilon$$

Si $x \notin U_\delta$

$$|f(x) - p_t(x)| = |f(x) - p(x) + t(p(x) - q(x))|$$

$$\leq |f(x) - p(x)| + t|p(x) - q(x)|$$

$$\leq \sup_{y \notin U_\delta} |f(y) - p(y)| + t\|p-q\|_I$$

$$|f(x) - p_t(x)| \leq \sup_{y \in I - U_\delta} |f(y) - p(y)| + t\ell.$$

I.6) On choisit $\varepsilon = \frac{m}{2}$. On choisit un δ associé

U_δ est un ouvert de I, donc $I - U_\delta$ est un compact qui ne contient aucun des x_i. Donc $\forall x \in I - U_\delta$ $|f(x) - p(x)| < m$.

$\sup_{y \in I - U_\delta} |f(y) - p(y)| = m_0 < m$ est atteint (On peut choisir δ assez petit pour que $I - U_\delta \neq \emptyset$). On choisit ensuite t_0 tel que $t_0 \ell + m_0 < m$ (il suffit de le prendre assez petit).

Finalement $\|f - p_{t_0}\|_I \leq \max(m - t_0(m-\varepsilon), t_0\ell + m_0) < m$.

Ceci est contraire à la définition de m.

Par contraposée $\quad \mathrm{Card}\{x, |f(x) - p(x)| = m\} \geq n+2$

I.7) On a: $m \leq \left\|f - \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)\right\|_I = \left\|\frac{f-p_1}{2} + \frac{f-p_2}{2}\right\|_I \leq \frac{1}{2}\|f - p_1\|_I + \frac{1}{2}\|f - p_2\|_I = m$.

Donc $\left\|f - \frac{p_1+p_2}{2}\right\|_I = m$. D'après I.6) il existe donc $(n+2)$ x_k distincts tels que $\left|f(x_k) - \frac{p_1(x_k) + p_2(x_k)}{2}\right| = m = \sup_{x \in I} \left|f(x) - \frac{p_1(x) + p_2(x)}{2}\right| = \sup_{x \in I} |f(x) - p_i(x)|$

$$m = \left|f(x_k) - \frac{p_1(x_k) + p_2(x_k)}{2}\right| = \left|\frac{f(x_k) - p_1(x_k)}{2} + \frac{f(x_k) - p_2(x_k)}{2}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{f(x_k) - p_1(x_k)}{2}\right|}_{\leq m} + \underbrace{\left|\frac{f(x_k) - p_2(x_k)}{2}\right|}_{\leq m} \leq m$$

On doit donc avoir $\forall k$ $\frac{f(x_k) - p_1(x_k)}{2} = \frac{f(x_k) - p_2(x_k)}{2} = \pm m$

$\forall k$ $\quad p_1(x_k) = p_2(x_k)$ $\qquad$ p_1 et p_2 sont égaux sur $n+2$ valeurs donc $p_1 = p_2$