2. Capacité du compact

II.1) On remarque que $\inf_P \|P\|_K = \inf_{R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} \|f - R\|_K$

où $f(x) = x^n$:

le résultat se déduit alors du résultat de I.1) et I.2) où on a seulement utilisé que I était compact et non vide.

Si $K = [a, b]$ $a < b$, l'unicité de q résulte de I.7.

II.2) Soit $\varepsilon > 0$ (ou $A \in \mathbb{R}^{*+}$), et choisissons m tel que

$$l_m < l + \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } l \in \mathbb{R} \quad (\text{ou } l_m < -(A+1) \text{ si } l = -\infty).$$

Commençons par remarquer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout m de $\mathbb{N}^*$ $l_{qm} \leq l_m$ (s'établit par récurrence sur q).

Soit $p > m$ $p = qm + r$ avec $r \in [1, m]$ et $q \in \mathbb{N}^*$

donc
$$l_p \leq l_r \frac{r}{qm+r} + \underbrace{l_{qm}}_{\leq l_m} \underbrace{\frac{qm}{qm+r}}_{\leq 1}$$

$$\boxed{l_p \leq l_m + l_r \frac{r}{qm+r}}.$$

Or r ne prend qu'un nombre fini de valeurs (m est fixé) et $\lim_{p \to +\infty} q = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{p \to +\infty} l_r \frac{r}{qm+r} = 0}$

Par conséquent $\exists p_0$ $\forall p \geq p_0$ $l_r \frac{r}{qm+r} < \frac{\varepsilon}{2}$ (si $l \in \mathbb{R}$)
< 1 (si $l = -\infty$)

et finalement $\forall p \geq p_0$

$$l \leq l_p \leq l + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = l + \varepsilon \text{ (si } l \in \mathbb{R})$$

$$l_p \leq -(A+1) + 1 = -A \quad (\text{si } l = -\infty).$$

$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists p_0 \ \forall p \geq p_0 \quad |l_p - l| < \varepsilon}$ i.e $\lim_{p \to +\infty} l_p = l$. (même résumé si $l = -\infty$)

II.3) Si q_n unitaire est tel que $\|q_n\|_K = t_n$, alors pour m et n dans $\mathbb{N}^*$ $q_n q_m$ est unitaire et dans $\mathbb{R}_{n+m}$ donc

$$t_{n+m} \leq \|q_n q_m\|_K \leq \|q_n\|_K \|q_m\|_K \leq t_n t_m.$$

Or $\forall p$ $t_p > 0$ car $q_p \neq 0$ puisque unitaire.

En passant au logarithme.

$$\ln t_{n+m} \leq \ln t_n + \ln t_m$$

$$(n+m) \ln t_{n+m}^{\frac{1}{n+m}} \leq n \ln t_n^{\frac{1}{n}} + m \ln t_m^{\frac{1}{m}}.$$

$$\ln t_{n+m}^{\frac{1}{n+m}} \leq \frac{n}{n+m} \ln t^{\frac{1}{n}} + \frac{m}{n+m} \ln t^{\frac{1}{m}}.$$

D'après la question précédente $\left(\ln t_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n \geq 0}$ est convergente dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.. En repassant à l'exponentielle

$$d_1(K) = \lim_{n \to +\infty} t_n^{\frac{1}{n}} \text{ existe dans } \mathbb{R}^+.$$

II.4) Soit $(x_1, \quad , x_{n+1}) \in K^{n+1}$.

$$\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} |x_i - x_j|\right)^n = \prod_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < k < j \leq n+1} |x_j - x_i|\right)}_{\leq w_n} \leq w_n^{n+1}.$$

En passant à la borne supérieure

$$w_{n+1}^{n} \leq w_n^{n+1}$$

$$w_{n+1}^{\frac{2}{n(n+2)}} \leq w_n^{\frac{2}{2(n-1)}}$$

$\left(w_n^{\frac{2}{n(n-1)}}\right)_{n \geq 2}$ est une suite décroissante positive.

elle possède donc une limite $d_2(K)$

II.5) K est compact donc K^n est compact, puisque $\theta_n : (x_1, \quad , x_n) \mapsto \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|$ est continue elle atteint donc son maximum sur K^n (qui n'est pas vide). (5)

Soit $(x_1, \quad , x_n)$ tel que $w_n = \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|$.

Soit $q = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$, unitaire et dans $\mathbb{R}_n^*[X]$.

Or a $\|q\|_K = |q(x_{n+1})|$, pour un x_{n+1}.. et $\|q\|_K \geqslant t_n$

Or a

$$\boxed{t_n w_n \le \|q\|_K t_n = \prod_{1\le i<j\le n+1} |x_i - x_j| \le w_{n+1}}$$

et par conséquent $\boxed{t_n \le \frac{w_{n+1}}{w_n}}$ ($w_n > 0$ car K contient toujours au moins n éléments)

II.6) On a vu que w_{n+1} était réalisé par au moins un $(n+1)$-uplet $(x_1, \quad , x_{n+1})$.

Dans ce cas $w_{n+1} = |V_{n+1}(x_1, \quad , x_{n+1})|$ où V est le déterminant de Vandermonde $\det \begin{pmatrix} 1 & & x_1^n \\ & & \\ 1 & & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$.

Mais si p est unitaire de degré n.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{n-1} & p(x_1) \\ & & \\ 1 & x_{n+1}^{n-1} & p(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{n-1} & x_1^n \\ & & \\ 1 & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

(En soustrayant à la colonne C_{n+1} la combinaison $\sum_{i=0}^{n-1} a_i C_{i+1}$ si $p = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$).

$$w_{n+1} = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^{n-1} & p(x_1) \\ & & \\ 1 & x_{n+1}^{n-1} & p(x_{n+1}) \end{pmatrix} \right|$$

On choisit pour p le polynôme tel que $\|p\|_K = t_n$.

et on développe le déterminant par rapport à la dernière colonne.

$$w_{n+1} = \left| \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1+k} V(x_1, \hat{x}_k, x_{n+1}) \, p(x_k) \right|$$

$$\underline{w_{n+1}} \leq \sum_{k=1}^{n+1} |V(x_1, \hat{x}_k, x_{n+1})| \, |p(x_k)| \leq (n+1) w_n t_n$$

($\hat{x}_k$ veut dire que l'on enlève x_k de la famille (x_1, x_{n+1}) pour obtenir une famille de n éléments)

II.7) Placer ici la démonstration du théorème/lemme de Cesàro, qui fait nécessairement partie de votre bagage.

II.8) D'après II.3 $d_1(K) = \lim_{n \to +\infty} t_n^{\frac{1}{n}}$.

Considérons la suite $(\ln t_1^{\frac{1}{1}}, \ln t_2^{\frac{1}{2}}, \ln t_2^{\frac{1}{2}}, \underbrace{\ln t_k^{\frac{1}{k}}, \ldots, \ln t_k^{\frac{1}{k}}}_{k \text{ fois}}, \ldots)$

elle converge vers $\ln d_1(K)$, donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k \ln t_k^{\frac{1}{k}}}{\sum_{k=1}^{n} k} = \ln d_1(K) \quad (\in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$$

en toute rigueur il faut utiliser Cesàro dans le cas $u = -\infty$)

On en déduit en repassant à l'exponentielle

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} t_k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} = d_1(K)$$

Or d'après 2.5 et 2.6

$$\frac{1}{t_1^{\frac{2}{n(n+1)}}} \left(\prod_{k=1}^{n} t_k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \leq \left(\frac{w_{n+1}}{w_2} \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \leq \frac{1}{t_1^{\frac{2}{n(n+1)}}} \underbrace{\left(\prod_{k=2}^{n+1} k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}}_{= (n+1)!} \left(\prod_{k=1}^{n} t_k \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

le lemme des gendarmes et la formule de Stirling $\left((n+1)! = e^{(n+1)\ln(n+1) + O(n+1)}\right)$

donnent $\underline{d_1(K) = d_2(K)}$