3. Polynômes de Tchebychev

III.1), III.2) et III.3) Voir la correction du premier devoir maison (Exercice classique à maîtriser).

III.4) L'application $\tau : P \mapsto \left(\frac{2}{b-a}\right)^n P\left(\frac{b-a}{2}X + \frac{b+a}{2}\right)$ est une bijection de l'ensemble des polynômes unitaires de degré n (que nous noterons dorénavant U_n) sur lui-même et

$$\|\tau(P)\|_I = \|P\|_{[a,b]}.$$

Il en résulte que $\boxed{T_n^{[a,b]} = \tau^{-1}(T_n^I) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n T_n\left(\frac{2Y-b-a}{b-a}\right)}$

et $\boxed{\|T_n^{[a,b]}\|_{[a,b]} = \frac{(b-a)^n}{2^n}\|T_n^I\|_I = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n}$

III.5) On peut écrire $p = c\,p_1$ avec $c \in \mathbb{Z}^*$ (donc $|c| \geq 1$) et p_1 unitaire de degré $d \geq 1$.

On a $\|p\|_I = |c|\,\|p_1\|_I \geq 1 \times 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^d \geq 2$.

III.6) Si f est la limite uniforme sur I de la suite $(p_k)_{k\geq 0}$ de polynômes, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \|p_{k+1} - p_k\|_I = 0.$$

(car $\|p_{k+1} - p_k\|_I \leq \|p_{k+1} - f\|_I + \|f - p_k\|_I$)

Donc $\underline{\exists k_0 \ \forall k \geq k_0 \quad \|p_{k+1} - p_k\|_I < 2.}$

D'après la question précédente cela implique

$\underline{\exists k_0 \ \forall k \geq k_0} \quad \underline{p_{k+1} = p_k = p_{k_0}.}$

Par conséquent $\boxed{f = p_{k_0}}$ est un polynôme à coefficients entiers.